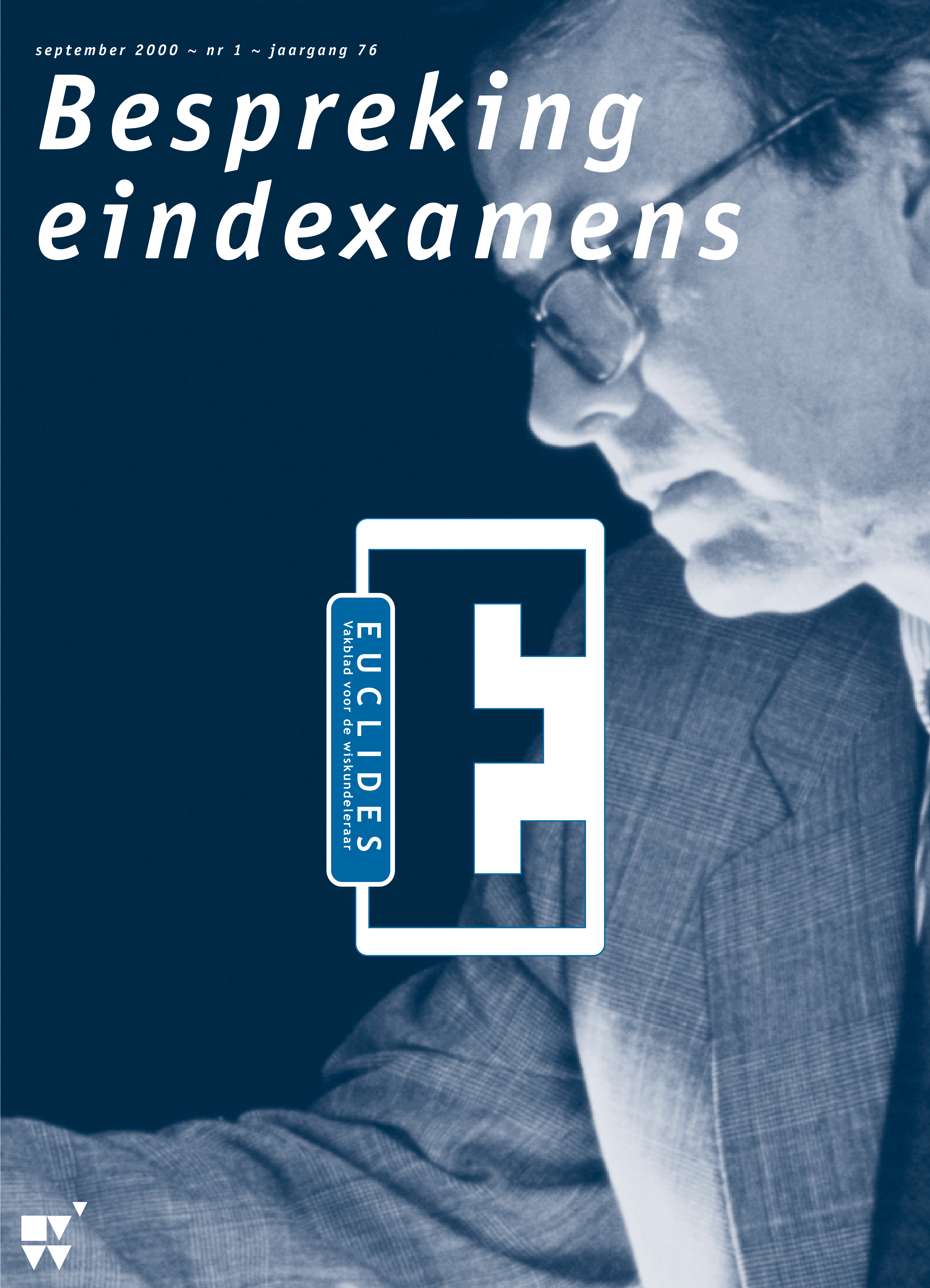
september 2000 ~ nr 1 ~ jaargang 76

Bespreking eindexamens



EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per ver. jaar: *f* 80,00
Studentleden: *f* 40,00
Leden van de VVWL: *f* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *f* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *f* 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: *f* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *f* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@worldonline.nl
of F. Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

1

SEPTEMBER 2000 JAARGANG 76

INHOUD

Kleurenfout in 0-nummer
Helaas is er iets misgegaan bij het drukken van het vorige nummer. Van een achttal pagina's zijn de kleuren verwisseld. De drukker biedt hiervoor zijn excuses aan.

[Van de redactietafel]

De redactie hoopt dat u de nieuwe vormgeving zoals gepresenteerd in het speciale nul-nummer heeft geapprecieerd.
Dit eerste reguliere nummer staat, zoals alweer enkele jaren, voor het grootste deel in het teken van de eindexamens van het afgelopen schooljaar; Dat was tevens het eerste schooljaar waarin examens volgens het nieuwe programma van de Tweede Fase zijn afgenomen.
Over de examens wordt veel gezegd in dit nummer, maar een aantal zaken springen er toch wel uit.

Vwo wiskunde A

Eigenlijk een heel gewoon examen met een 6,2 als gemiddelde en nog steeds wat gemor over taligheid en hoe om te gaan met (on)nauwkeurigheden.
Twee zaken vind ik echter om aandacht vragen. Ten eerste is er op kennisnet (www.kennisnet.nl) aan hoogleraren gevraagd wat hun mening was over dit examen. Het betrof hier hoogleraren in de zuivere wiskunde. U kunt het commentaar natuurlijk wel raden: dit is natuurlijk geen wiskunde.
Wat mij treft is dit gebrek aan kennis over een examenprogramma dat al 15 jaar oud is en bedoeld voor een doelgroep die daarvoor helemaal geen wiskunde deed. Wiskundeleraren in de bovenbouw geven wiskunde aan alle leerlingen. Wereldwijd is er in ieder geval wel zeer veel waardering voor deze poging om zoveel mogelijk leerlingen op het goede eigen niveau zoveel mogelijk zinvolle wiskundige vaardigheden en ervaringen op te laten doen.
Een ander punt betreft meer een bezorgdheid: komend schooljaar doet de eerste lichting leerlingen examen wiskunde A12 (en A1). Het gemiddelde zal dan niet meer omhoog getrokken worden door wiskunde B-leerlingen die er wiskunde A bij doen. Als het komende Tweede Fase examen Wiskunde A12 van hetzelfde niveau zal zijn als dit examen wiskunde A, dan laten de gevolgen zich eenvoudig raden. Het lijkt in ieder geval verstandig deze leerlingen goed te trainen in het omgaan met hun grafische rekenmachine, dat kan waarschijnlijk veel punten opleveren.

Havo wiskunde A

Op dit examen werd een 7,0 gemiddeld gescoord met 11% onvoldoendes.
Ook hier weer het commentaar van de wetenschappers dat het niets voorstelt.
Veel docenten zijn echter tevreden met dit examen voor deze groep leerlingen.
Hoewel er ook redelijk veel docenten zijn die een 7,0 gemiddeld en 11% onvoldoendes als ongewenst zien voor een wiskundevak. Waarom mag dit bij wiskunde A eigenlijk niet voorkomen, vraag ik me dan af?

Havo wiskunde B1 en B12 (Tweede Fase)

Hier een heel ander verhaal. Ophogingen van respectievelijk 15 en 6 punten en daarna resteert een percentage onvoldoendes van ruim 30%.
Nuchter moet geconstateerd worden dat het gros van deze leerlingen de afgelopen twee jaar ook niet zo heel veel wiskunde heeft geleerd.
Gering aantal contacturen in de Tweede Fase, versnipperde aandacht over veel vakken, wennen aan nieuwe boeken, verkeerde inschatting van het belang van de grafische rekenmachine, te moeilijke examens? Wat de belangrijkste factor is moet de komende jaren blijken. Als u volgend jaar een 5 havo heeft, lees dan in ieder geval de bijdrage van Erik Zomervrucht in dit nummer. Dat kan u mogelijk helpen.

Genoeg over de examens van afgelopen jaar. Een nieuw jaar staat weer voor de deur met een spetterend lustrumcongres en het bijzondere statistiekproject De Nationale Doorsnee. U doet aan beide toch wel mee?

Kees Hoogland

Eindexamens vbo en mavo C/D, eerste tijdvak 2000

[Petra Boon]

Na het examen van vorig jaar hebben de examenconstructeurs getracht meer duidelijkheid te scheppen in de afrondingsproblematiek. Bovendien heeft men getracht het correctievoorschrift zo te schrijven dat het bij de correctie meer houvast zou geven. Iedereen heeft na dit examen zijn eigen mening hierover, maar uit de reacties van docenten blijkt dat we hier aardig in geslaagd zijn. Allereerst zullen we ingaan op de reacties van docenten en daarna twee opgaven bespreken die verderop afgedrukt straan.

vbo/mavo C	1997	1998	1999	2000
gemiddelde score	56	48	45	54
percentage behaalde punten	63	54	53	60
cesuur, respectievelijk N-term	54/55	54/55	51/52	N = 1,0
percentage onvoldoenden	18	36	38	23
gemiddeld cijfer	6,6	5,8	5,8	6,4

vbo/mavo D	1997	1998	1999	2000
gemiddelde score	63	46	49	58
percentage behaalde punten	70	52	56	65
cesuur, respectievelijk N-term	54/55	51/52	53/54	N = 1,0
percentage onvoldoenden	6	34	33	12
gemiddeld cijfer	7,3	5,9	6,0	6,8

Contexten in C	
Postpakketten	76%
Tuinschuur	55%
Vlaggen	60%
Logo	53%
Geurig Geld	50%
Blokkentorens	69%

Contexten in D	
Blokkentorens	81%
Tuinschuur	74%
Aankoop nieuwe auto	72%
Logo	65%
Veerpont	22%
Sinaasappels	56%

Reacties op de examens

Over het algemeen waren de docenten positief over de examens, zoals onder andere bleek op de door de NVvW georganiseerde besprekingen. Zij vonden de spreiding over de stof voldoende en het aantal routine- en originele vragen goed. Men was tevreden over de keuze van het startvraagstuk en ook was het verschil tussen C- en D-examen goed. Het examen was niet te lang, maar de leerlingen hadden wel hun tijd nodig. De kandidaten formuleerden het iets anders: ‘Het was gewoon een makkelijk examen.’
Het correctievoorschrift van vraag 9 van het D-examen vereiste een aanpassing. Kort na het examen is er een mededeling naar de scholen verzonden. Er was namelijk nog een andere oplossing die ook goed gerekend kon worden.
Verder waren de docenten over het algemeen tevreden over de nauwkeurigheid en duidelijkheid van het correctievoorschrift. Vooral de toevoeging van tekeningen vond men erg prettig.

Scoreresultaten

Dit jaar werd voor het eerst de nieuwe methode gebruikt om het cijfer te bepalen. Het examen hoeft

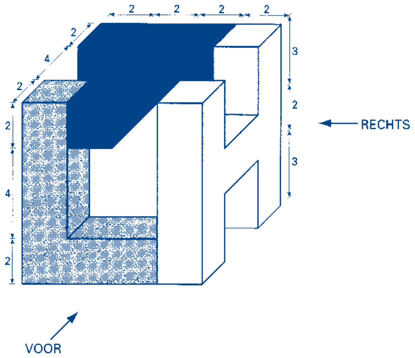
Logo

figuur 1



Hierboven zie je een deel van het briefpapier dat Ligthart Hogedruk Techniek (LHT) gebruikt voor haar bedrijf.
Van het logo heeft het bedrijf een ruimtelijk model van massieve kunststof letters laten maken. De maten en de kleuren zijn in de figuur hieronder vermeld.
Dit ruimtelijk model past precies in een kubusvormig doosje met zijden van 8 cm.

figuur 2



De letter L is blauw, de letter H is geel en de letter T is rood.

De maten staan aangegeven in cm.

4p **12** □ Bereken hoeveel cm³ kunststof er nodig is voor de letter T. Schrijf je berekening op.

5p **13** □ Teken op de bijlage bij vraag 13 het bovenaanzicht van dit ruimtelijke model op ware grootte en geef in dit bovenaanzicht met letters aan welke vlakken bij de L, H en T horen. Je mag de vlakken ook kleuren in de juiste kleur.

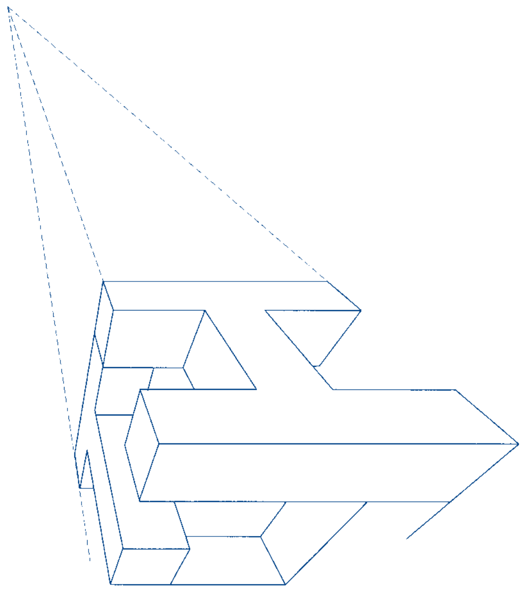
Op de bijlage bij vraag 14 staat een deel van een tekening van het ruimtelijk model.
5p **14** □ Maak de letter T in deze tekening af.

Voor het ruimtelijke model had men in totaal 176 cm³ kunststof nodig. Besloten wordt om een vergroting van het ruimtelijk model te maken zodat dit als kunstwerk voor het bedrijf geplaatst kan worden. Men besluit om alle maten, zoals ze in figuur 2 zijn aangegeven, 20 keer zo groot te maken.
4p **15** □ Hoeveel m³ kunststof, afgerond op twee decimalen, is er voor deze vergroting nodig? Licht je antwoord toe met een berekening.

Op de bijlage bij vraag 17 staat een deel van een perspectieftekening van het logo. Alleen de letter L is nog niet helemaal af.
3p **17** □ Maak de letter L in de tekening af.

Bijlage bij de vragen 1, 4, 5, 15, 17, 18, 19 en 20

Vraag 17



Uit het C-examen **Uit het D-examen**

niet per se 90 scorepunten te hebben en er moet een omrekeningstabel gehanteerd worden om het eindcijfer te bepalen. Vroeger betekende een cesuur van 54/55 dat het gemiddelde niet aangepast werd, nu komt dat overeen met N=1,0. De tabellen hiernaast geven ons een overzicht van de cesuur van de afgelopen jaren. Voor alle duidelijkheid: de N=1,0 van dit jaar betekent dus hetzelfde als bijvoorbeeld de cesuur van 54/55 in 1997.

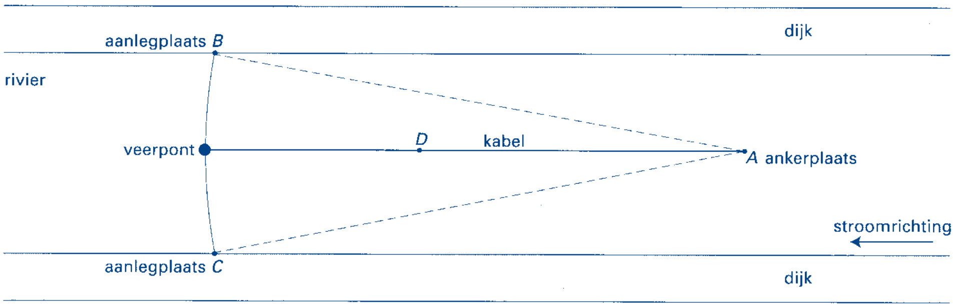
Er waren bij beide examens zes contexten. Bij het C-werk waren er 23 vragen en bij D 24 vragen.
In de tabel linksonder zijn de contexten in volgorde genoemd waarbij het behaalde percentage scorepunten is aangegeven. Beide examens beginnen met een opgave waarbij zeer hoog gescoord is. Als eindopgave is bewust niet voor de moeilijkste opgave gekozen.
Zes van de vragen (goed voor 25 punten) kwamen in beide examens voor. De C-kandidaten haalden bij deze zes opgaven 57% van de punten en de D-kandidaten 75%. Er bleek voldoende verschil te zijn tussen het C- en D-examen. Bij N=1,0 zou dat verschil omgerekend naar het gehele examen 1,1 cijferpunt zijn: dat wil globaal zeggen dat een D-kandidaat met een cijfer 5,5 op het D-examen een 6,6 op het C-examen zou halen. Beide examens hadden minder dan 20% echt moeilijke vragen (vragen met een p-waarde kleiner dan 40). Op ongeveer de helft van de vragen scoorden de kandidaten 60% tot 100% van de maximumscore.
Dit alles bij elkaar heeft tot gevolg gehad dat de CEVO de N=1,0 gehandhaafd heeft.

Bespreking van de context 'Logo'
Logo is een opgave over ruimtemeetkunde die zowel in het C-examen als in het D-examen voorkomt. Er zijn drie identieke vragen, twee over inhoud en één vraag over tekenen. Bij C leverden beide vragen over inhoud moeilijkheden op terwijl de tekenvraag goed gemaakt

Veerpont

Op een aantal rivieren in ons land wordt gebruik gemaakt van een veerpont. Zo kunnen automobilisten, fietsers en voetgangers de rivier oversteken.
De veerpont in de schets hieronder ligt vast aan een staalkabel, die is vastgemaakt aan een ankerplaats (punt A), midden in de rivier. Deze kabel zorgt ervoor dat de veerpont niet wegdrijft door de stroming van de rivier. De kabel is 45 meter lang. Deze schets staat ook op de bijlage bij de vragen 18, 19 en 20.

schets



Wanneer de veerpont bij aanlegplaats B is, ligt de kabel langs lijn AB. Wanneer de veerpont bij aanlegplaats C is, ligt de kabel langs lijn AC. We gaan er vanuit dat de kabel steeds horizontaal en strak gespannen blijft. De hoek tussen AB en AC is 36°.
In de tekening is ook de vaarweg van punt B naar punt C van de veerpont aangegeven.

3p **18** □ Bereken, in één decimaal nauwkeurig, de lengte van deze vaarweg in meters. Schrijf je berekening op.

4p **19** □ Bereken, in één decimaal nauwkeurig, hoe breed de rivier in meters (de afstand van B tot C) is. Schrijf je berekening op.

Op een dag besluit men de ankerplaats te verplaatsen. De ankerplaats komt nu bij punt D te liggen. De aanlegplaatsen B en C van de veerpont moeten natuurlijk hetzelfde blijven. Bram beweert dat de vaarweg van de veerpont nu korter is.

3p **20** □ Leg uit waarom Bram ongelijk heeft. Je mag hierbij de tekening op de bijlage gebruiken.

Uit het D-examen

werd. De vierde vraag die ook een tekenvraag was leverde ook geen problemen op. Bij het D-examen was alleen de vraag over de vergroting wat lastiger dan de andere vragen. Zelfs door 44% van de kandidaten werd bij de perspectieftekening de maximum score gehaald. De gemiddelde score was 1,9 bij een maximum score van 3. De tekening op de bijlage kon op meerdere manieren afgemaakt worden. Het tweede verdwijnpunt was niet per sé noodzakelijk maar was met nauwkeurig tekenen goed te vinden.

Bespreking van de context 'Veerpont'
Dit was duidelijk de moeilijkste vraag in het D-examen. De kandidaat moest inzien dat de vaarweg tussen de twee aanlegplaatsen een cirkelboog was. Een geodriehoek had er uitsluitsel over gegeven dat de vaarweg geen lijnstuk was. Deze opgave maakte goed onderscheidend tussen de goed scorende kandidaten en de wat minder scorende kandidaat. De goed scorende kandidaten haalden hier iets meer dan de helft van de punten terwijl de minder goede kandidaten met deze opgave slecht uit te voeten konden.

In memoriam E.H. Schmidt

1906-2000

[Freek Mahieu]

Ik zit tegenover Leo Muskens. Het bestuur van de vereniging heeft ons gevraagd een 'in memoriam' te schrijven in verband met het overlijden van Ebbe Hugh Schmidt op 17 april jl. op de leeftijd van 93 jaar. Velen van onze oudere collega's zullen inspecteur Schmidt kennen uit de tijd rond de invoering van de Mammoetwet in 1968.

Leo werkte in de zestiger jaren nauw met Schmidt samen bij het vervullen van de opdracht om nieuwe wiskundeprogramma's samen te stellen, waarbij bestaande programma's, zoals die voor mulo-A en -B drastisch werden gewijzigd. Een van de redenen hiervoor was dat er allerlei doorstroom-mogelijkheden moesten zijn tussen de nieuwe schooltypen mavo, havo en vwo.

Ikzelf als wiskunde- en natuurkundeleraar in een klein wereldje én pleitbezorger van de oerdegelijke mulo-B-opleiding aan mijn school stelde me aanvankelijk neutraal op tegenover de nieuwe plannen, maar ik kon op den duur toch niet om inspecteur Schmidt en Leo Muskens heen. Leo was in mijn ogen de 'uitvinder' en enthousiast promotor van de nieuwe ideeën en Schmidt de 'vader' die een wakend oog hield op de ontwikkelingen en een vurig paard als Leo enigszins in toom kon houden.

Schmidt was een self-made-man, als onder-wijzer begonnen en via aktenstudie wiskunde-leraar geworden aan de kweekschool. Hij had belangstelling voor zuivere wiskunde, filosofie en muziek. Toen hij inspecteur werd, een duizendpoot in die tijd, had hij niet meer de gelegenheid zijn doctoraalstudie af te maken, wat hem gespeten moet hebben. Hij was lid van de vereniging en werd in 1976 benoemd tot erelid wegens zijn visie op het wiskunde-onderwijs, zijn invloed bij de modernisering van dit onderwijs, zijn luisteren naar de visie van anderen en zijn inzet om anderen te overtuigen. Schmidt heeft het erelidmaatschap heel erg op prijs gesteld, getuige het feit dat hij dit zo uitdrukkelijk in de rouwadvertentie heeft laten vermelden.
Na zijn pensionering bleef hij tot 1990 de algemene ledenvergadering bezoeken, waar hij altijd uitstekend op de hoogte bleek te zijn van de laatste ontwikkelingen in de Nederlandse wiskundewereld.

Leo is zich nog heel goed bewust van de duidelijk merkbare inbreng van Schmidt in de diverse commissies destijds. Als lid van de 'commissie havo' schaarde Schmidt zich in 1965 achter de plannen om algebra en meetkunde tot één vak wiskunde om te smeden, de microscopie van de driehoek te doorbreken, transformaties in te voeren in plaats van de al niet meer zo populaire 'gevallen van congruentie en gelijk-vormigheid' en het verwerken van onderwerpen uit de verzamelingenleer en de logica. De 'Schotse methode' met het zelfontdekkend leren als grondslag, werd daarbij als voorbeeld genomen. Opvallend was dat hij niet alleen lette op de wiskundige inhoud, maar ook op didactische haalbaarheid.
Schmidt zette zich in voor het mavo en stond voor de moeilijke taak de leraren bij mulo en lto gerust te stellen zolang er nog geen examen-programma was met daarbij behorende voor-beelden van examenvraagstukken. Op zijn initiatief werd een opgavenboekje samengesteld, zodat iedereen zich alvast een beeld kon vormen van de exameninhoud.

Weer in de schoolbanken op een informatieve bijeenkomst met Schmidt voor de klas, ervoer ik deze rijzige man als vriendelijk, bescheiden en door en door integer. Hij luisterde goed naar ons, sneed je niet de pas af en gaf ruimte voor opmerkingen van de werkvloer, wat in de toenmalige verhoudingen tussen leraren en inspecteur niet zó vanzelfsprekend was. In feite was hij (en volgens Leo voelde hij dat zelf ook zo) de eerste vakinspecteur voor mulo en mavo. Hij zag de waarde in van het eerst bijscholen van leraren op wiskundig en didactisch terrein, alvorens deze zich op de praktijk zouden gaan werpen. Die uitvoering in de praktijk, waarvoor hij zich ook volledig verantwoordelijk achtte, werd beproefd op 36 experimenteerscholen. In 1972 werd het eerste centraal schriftelijk examen mavo-4 afgenomen.
Toen ik in 1973 Leo als lid namens het mavo-verband in de CVO (voorganger van de CEVO) opvolgde, was Schmidt enige tijd daarvoor opgevolgd door inspecteur Zimmerman. De twee nieuwelingen konden een degelijk opgezet huis verder aftimmeren met verantwoorde eind-examens voor mavo-3/lto-t en mavo-4 zonder te vermoeden dat er al snel talloze verbouwingen en uitbreidingen zouden volgen.

Leo en ik beëindigen ons gesprek dat drie uren in beslag nam.
Een toch weer nieuwe waardering van het verleden.
Ter nagedachtenis aan inspecteur Schmidt.

Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 2000

[Gert Bakker, Kees Lagerwaard, Ger Limpens en Henk Schuring]

Inleiding

In dit artikel vindt men enige gegevens van de examens wiskunde van vwo en havo van mei 2000.
Eerst komen de resultaten aan de orde aan de hand van de steekproefgegevens die het Cito verzameld heeft. De N-term, de eigentijdse variant van de cesuurvaststelling, is door de CEVO bepaald met behulp van deze steekproefgegevens en de meningen van de docenten. In het eerste algemene overzicht zijn alleen de oude examens voor havo opgenomen. De gegevens van de Tweede Fase-examens havo A1,2, B1 en B1,2 komen in de daaropvolgende tabellen aan de orde. Ook bij de besprekingen van de diverse examens komen daar waar relevant passages over deze Tweede Fase-examens voor.
Gert Bakker, Kees Lagerwaard, Ger Limpens en Henk Schuring zijn de betrokken Cito-medewerkers die verantwoordelijk zijn voor de bijdragen over de verschillende wiskunde-examens.
De meningen van de docenten tenslotte vindt men in een verslag van de regionale besprekingen van deze examens, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Dit verslag (op blz. 57) is van de hand van Jan de Geus.

De resultaten van de examens

Het geven van een overzicht van de resultaten van deze examens is slechts mogelijk dankzij de medewerking van de betrokken docenten die de gegevens van kandidaten van hun school tijdig hebben opgestuurd.

Gegevens havo-oud versus havo 2e fase

In de tabellen op de rechter pagina staan de gegevens van de nieuwe (2e fase) havo-examens vermeld. Voor de volledigheid en ter vergelijking zijn in de eerste tabel ook weer de eerder vermelde gegevens van de havo-examens oude stijl opgenomen.

Havo wiskunde A

Dit was het laatste reguliere examen havo A volgens het 'oude' programma. Afgezien van een paar bezemrondes zal het vanaf volgend jaar gaan om het profielprogramma wiskunde A1,2. Het slot van 12 jaar examens wiskunde A havo kreeg door het resultaat

Enige algemene gegevens van de examens (alleen havo-oud)

	havo-A	havo-B	vwo-A	vwo-B
aantal kandidaten	32985	11366	24132	13443
gemiddelde score	60	49	52	47
standaarddeviatie	13	16	15	16
betrouwbaarheid	67	79	78	80
cesuur (N-term)	1,0	1,2	1,0	1,3
percentage onvoldoenden	11	34	29	41
gemiddeld cijfer	7,0	6,1	6,2	6,0

p'- waarde van de afzonderlijke vragen van de examens

Vraag	havo-A	havo-B	vwo-A	vwo-B
1	74	55	98	91
2	82	41	77	68
3	65	88	54	71
4	96	59	27	34
5	91	56	50	49
6	54	30	85	51
7	58	64	61	51
8	73	82	43	38
9	23	62	56	38
10	62	64	82	76
11	24	20	80	58
12	82	74	25	33
13	88	48	42	56
14	74	49	33	49
15	47	89	65	26
16	75	59	62	--
17	64	33	61	--
18	83	31	68	--
19	60	26	39	--

n.b. De p'-waarde van een vraag is de gemiddelde score, uitgedrukt in procenten van de maximumscore van die vraag.

een, voor de leerlingen, feestelijk tintje. De gemiddelde score was namelijk vrij hoog, waardoor er bij N = 1 een gemiddeld cijfer 7,0 werd behaald. Slechts 11% van de kandidaten wist voor dit examen geen voldoende te scoren. Docenten vonden het examen wel aan de gemakkelijke kant, maar vonden dat voor een laatste examen niet zo erg: daarmee blijft het aantal bezem-kandidaten beperkt. Men was goed te spreken over de afwisselende contexten en het heldere taalgebruik.
De openingsopgave *Seychellenzangers* werd behoorlijk goed gemaakt (een gemiddelde score van 74%) en bleek daarmee een geslaagde startopgave. Ook de opgave *Hoe lang is een Nederlander* ging goed: twee eenvoudige instapvragen, gevolgd door twee moeilijker vragen (met p' 54 en 58). Vraag 6 was een normale-verdelingsvraag waar eerst het gemiddelde moest worden berekend. Nogal wat leerlingen (27%) bleken de eerste stap niet te kunnen maken, waardoor ze ook het standaardiseren en tabelzoeken niet konden demonstreren (kennelijk durven veel leerlingen niet zelf een waarde van dat gemiddelde te kiezen en daarmee verder te rekenen).
Opgave 3 *Luchtdrukte* bleek de lastigste opgave. In de eerste vraag moest de ene grafische representatie worden omgezet in een andere. Dat ging de meesten goed af (p' = 73).
Bij vraag 9 is de grafiek van een cumulatief verdelingsmodel gegeven en ook de mediaan wordt genoemd. Onderzocht moet worden of het gemiddelde groter of kleiner is dan de mediaan. Maar liefst 68% van de kandidaten scoorde hier 0 punten. Dit bleek de moeilijkste vraag uit het examen (p' = 23).
De boxplot die in vraag 10 getekend moest worden, bleek niet echt lastig (p' = 62), maar de laatste vraag over een exponentiële functie liet maar liefst 62% van de kandidaten met lege handen achter. Misschien zijn leerlingen niet erg vertrouwd met dalende groeifuncties en zijn sommigen in problemen geraakt doordat ze het punt (150, 0) wilden gebruiken. De opstellers van dit examen hadden verwacht dat de beginwaarde b voor de meeste leerlingen geen probleem zou zijn, maar dat het berekenen van g wel vrij lastig gevonden zou worden.
Wiskunde in bad bleek de meeste leerlingen wel aan te spreken, afgezien van de laatste vraag. Ook de opgave *Enquête* pakte goed uit. Omdat kansrekenvragen vaak moeilijk gevonden worden, was er deze keer vrij veel moeite gedaan om de situatie helder uiteen te zetten, onder meer met behulp van een boomdiagram. Getuige een gemiddelde score van 70% bleek dat in deze opgave goed gelukt.

zie: deel van opgave 3 Luchtdrukte op pagina 044.

Havo wiskunde A1,2

Een veertigtal scholen nam deel aan de eerste profiel-examens. Op basis van de door het Cito verzamelde gegevens bleek ook dit examen vrij goed gemaakt te zijn. Omdat de examens A-oud en A1,2 elkaar voor ruim de helft overlapten, kon door scorevergelijking worden vastgesteld dat de examens qua moeilijkheid gelijkwaardig zijn. In de steekproef bleek het gemiddeld cijfer 6,5 te zijn bij N = 1. Bij zo'n eerste examen wordt altijd enige voorzichtigheid in acht genomen. Dat houdt in dat de nieuwe vakinhouden en de inzet van de GR niet tot op de uiterste diepte worden bevraagd. Toch bleef de score op vraag 14, een vraag over een afgeleide functie, ver beneden de verwachting.
Van de A-opgave *Hoe lang is een Nederlander* werden de eerste 3 vragen ook in dit examen gesteld, evenals de volledige opgaven *Enquête* en *Luchtdrukte*. Helaas bleek de term 'histogram' niet in het A1,2-examenprogramma

p'- waarde van de afzonderlijke vragen van de examens

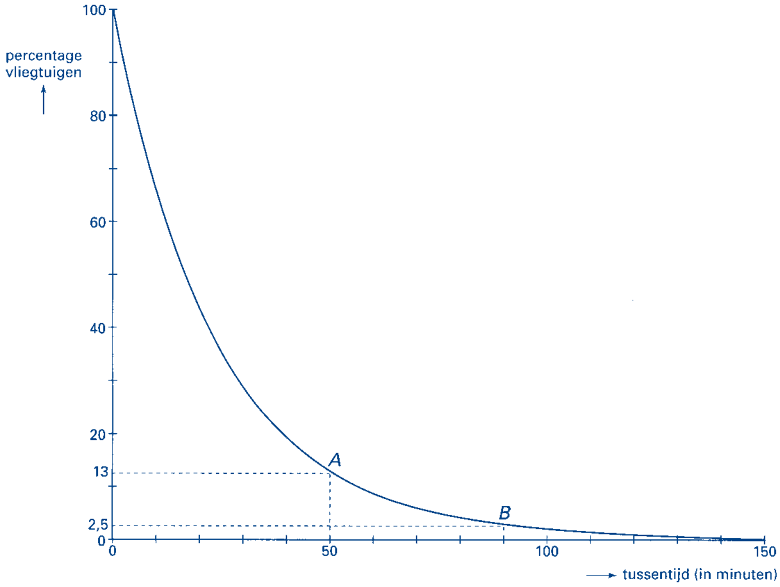
Vraag	havo-A1,2	havo-B1	havo-B1,2
1	97	47	72
2	92	35	40
3	34	63	67
4	74	40	51
5	58	54	87
6	78	44	59
7	62	29	54
8	100	27	84
9	24	82	67
10	43	59	33
11	24	34	42
12	82	20	30
13	72	75	69
14	20	48	33
15	64	48	21
16	84	21	40
17	76	50	30
18	50	13	32
19	54	30	--
20	--	52	--

Enige algemene gegevens van de examens

	havo-A	havo-A1,2	havo-B	havo-B1	havo-B1,2
aant. kand.	32985	1406	11366	437	495
gem. score	60	55	49	36	43
standaarddev.	13	12	16	14	13
betr.baarheid	67	66	79	75	71
cesuur (N-term)	1,0	1,0	1,2	2,5	1,6
perc. onvold.	11	21	34	33	34
gem. cijfer	7,0	6,5	6,1	6,1	6,0

Als tussentijden van aankomende vliegtuigen op andere vliegvelden of gedurende andere periodes op de manier van figuur 3 worden weergegeven, ontstaat telkens een zelfde soort grafiek. In figuur 4 is een model van dit type grafiek getekend. Langs de verticale as staan nu percentages. Figuur 4 staat ook op de bijlage.

figuur 4



Je kunt in figuur 4 bijvoorbeeld aflezen dat 13% van de vliegtuigen een tussentijd heeft van 50 minuten of meer (punt A) en dat 2,5% een tussentijd heeft van 90 minuten of meer (punt B).

In figuur 4 lees je ook af dat 50% van de vliegtuigen volgens dit model een tussentijd heeft van 17 minuten of meer (en ook 50% een tussentijd van minder dan 17 minuten). De gemiddelde tussentijd is niet gelijk aan 17 minuten.

3p **9** □ Onderzoek of de gemiddelde tussentijd groter of kleiner dan 17 minuten is.

Aan de hand van figuur 4 kan een boxplot van de tussentijden gemaakt worden.

5p **10** □ Teken de boxplot. Licht je werkwijze toe. Gebruik daarbij de figuur op de bijlage.

Er is een formule van de vorm $y = b \cdot g^t$ die goed past bij de grafiek in figuur 4. Hierbij is t de tussentijd in minuten en y het percentage vliegtuigen met een tussentijd van t minuten of meer.

4p **11** □ Hoe groot zijn b en g? Licht je antwoord toe.

Deel van opgave 3 Luchtdrukte

voor te komen (wel de term kanshistogram). Hoewel het Nomenclatuurrapport de term histogram voor A1,2 wel bekend veronderstelt, moesten op formele gronden aan alle kandidaten de volle 5 punten worden toegekend voor vraag 8. Ook in het A1,2-examen heette de vierde opgave *Wiskunde in bad*, maar er zaten andere vragen in. Zo werd in vraag 13 een schets van een grafiek gevraagd en kwam in vraag 14 de afgeleide aan bod. Vraag 13 ging goed (p' = 72), maar vraag 14 bleek met een p' van 20 de moeilijkste vraag uit het examen. Maar liefst 55% van de kandidaten scoorde hier 0 punten. En dat terwijl het hier om de afgeleide van een kwadratische functie ging.
Opgave 5 *Boekwaarde* ging over drie methoden van afschrijving (lineair, kwadratisch en exponentieel), een context die heel goed past bij het profiel E&M. Leerlingen bleken met deze opgave redelijk goed uit de voeten te kunnen: de scores op die vragen varieerden van 50% voor vraag 18 tot 84% voor vraag 16.
Bij 9 van de 19 vragen (3, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18 en 19) kon de GR zinvol worden ingezet, wat overigens niet betekent dat elk van deze vragen zonder GR onoplosbaar zou zijn. Enkele docenten van de 40 scholen gaven tijdens een examenbespreking aan dat zij graag een flink aantal vragen in het A1,2-examen zouden zien die zonder GR onoplosbaar zijn.
Uit de steekproef bleek dat 11% van de A1,2-kandidaten C&M-leerlingen zijn die hun wiskunde hebben 'opgewaardeerd'. De scores van deze leerlingen waren vrijwel gelijk aan die van de E&M-leerlingen.

Zie Opgave 4 Wiskunde in bad.

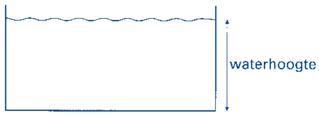
Havo wiskunde B

Dit examen oogstte bij docenten niet die lof die het examen vorig jaar ten deel viel. Men was wat gereserveerder. Veel docenten vonden dat dit laatste 'oude' examen nogal afwijkend oogde van wat men

Opgave 4 Wiskunde in bad

Misschien is het je na het nemen van een bad wel eens opgevallen dat het water in het begin sneller wegloopt dan aan het eind. Aan de hand van een wiskundig model gaan we dat hier onderzoeken. De vorm van het bad is een rechthoekige bak. Nadat we de stop eruit getrokken hebben, wordt de hoogte van het badwater steeds kleiner. Deze hoogte noemen we de waterhoogte. Zie figuur 5.

figuur 5



Tijdens het leeglopen wordt op een aantal tijdstippen de waterhoogte gemeten. Bij deze meetresultaten past de volgende formule:

$$waterhoogte = (7 - 0{,}03t)^2$$

Hierbij wordt de *waterhoogte* gegeven in centimeter en de tijd t in seconden. Als het bad vol is, is volgens de formule de waterhoogte 49 cm. Op $t = 0$ begint het bad leeg te lopen.

Als de waterhoogte gelijk is aan 0 is het bad helemaal leeggelopen.

3p **12** Toon aan dat het leeglopen van het bad ongeveer 233 seconden duurt.

5p **13** Leg uit met behulp van een schets van de grafiek van de waterhoogte dat het water in het begin sneller wegloopt dan aan het eind.

De formule van de waterhoogte kan ook geschreven worden als

$$waterhoogte = 49 - 0{,}42t + 0{,}0009t^2$$

Aangezien de waterhoogte daalt tussen $t = 0$ en $t = 233$, zal de afgeleide daar steeds negatief zijn. Met behulp van deze afgeleide kun je aantonen dat het water in het begin sneller wegloopt dan aan het eind.

6p **14** Toon dit aan met behulp van een schets van de grafiek van de afgeleide.

Bij het leeglopen van het bad is het bad op een gegeven moment nog maar half vol. De waterhoogte is dan de helft van wat het oorspronkelijk was. De tijd die hiervoor nodig is, noemen we de *leeglooptijd eerste helft*. De tijd die vervolgens nodig is om het bad verder leeg te laten lopen, noemen we de *leeglooptijd tweede helft*. Die tweede helft kost natuurlijk meer tijd, het gaat immers steeds langzamer.
De verhouding tussen deze leeglooptijden noemen we de *leegloopverhouding*. In een formule:

$$leegloopverhouding = \frac{leeglooptijd\ tweede\ helft}{leeglooptijd\ eerste\ helft}$$

De leegloopverhouding blijkt voor alle rechthoekige baden hetzelfde te zijn.

6p **15** Bereken deze leegloopverhouding.

Opgave 4 Wiskunde in bad

gewend was, de keuze van de opgave *Fruitvliegjes* vond men minder gelukkig, het aantal routinevragen was beperkt en er was relatief veel meetkunde waarvoor nogal wat inzicht nodig was.
Aan de andere kant vond men het examen toch goed te doen: kandidaten hadden voldoende mogelijkheden om te scoren. Men sprak ook van leuk, afwisselend werk, waarbij de kandidaten overigens wel de tijd van drie uren nodig hadden.
Het correctievoorschrift bevatte helaas een fout in vraag 10. Hierover is kort na het examen door de CEVO een brief naar de scholen gestuurd. Verder wilden docenten in het correctievoorschrift graag meer houvast voor de puntentoekenning bij foutieve uitwerkingen van de kandidaten.

Het examen bestaat uit 19 vragen, verdeeld over vijf opgaven, goed voor in totaal 90 punten. De openingsvraag per opgave had een p'-waarde van respectievelijk 55, 88, 82, 74 en 89: dus elke opgave, behalve de 1e, opent met een heel gemakkelijk vraag.
De gemiddelde score van de 2001 kandidaten uit de steekproef was 49 (vorig jaar 52). Bij de twee vragen van de eerste opgave *Een functie* bleven de behaalde scores achter bij de verwachtingen. De CEVO heeft besloten om N = 1,2 te nemen. Hiermee kwam het gemiddeld cijfer op 6,1 (vorig jaar 6,2) en het percentage onvoldoenden op 34 (vorig jaar 32).

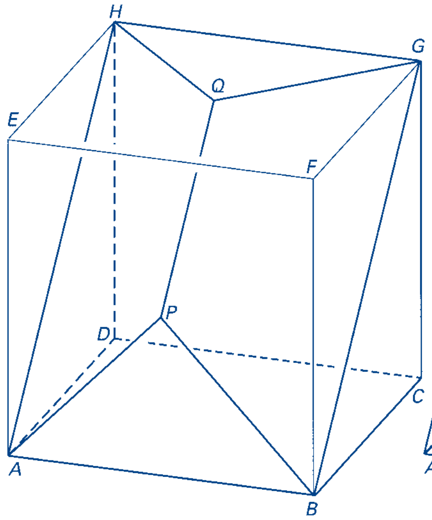
Opgave 1 *Een functie* betreft $f(x) = 2\sin(x + \frac{1}{6}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$ en gegeven grafiek.
Vraag 1 is Los op: $f(x) < -1$. Hierop behaalde men gemiddeld slechts 55% van de beschikbare vier punten.
In vraag 2 moet berekend worden hoe groot de hoek is die een raaklijn in $P(0, 1)$ met de y-as maakt. Hierop behaalde men maar 41% van de vier punten.
De examenconstructeurs vonden dit een acceptabele eerste opgave en hadden verwacht dat driekwart van de punten behaald zou worden; de kandidaten werden mogelijk wat verrast door een goniometrische functie als

Lichaam

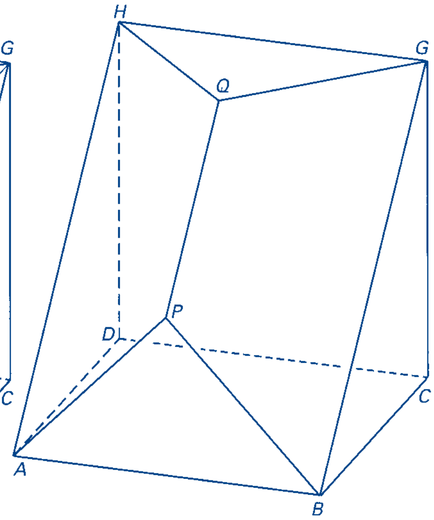
In de kubus *ABCD.EFGH* met ribbe 6 cm past een lichaam *L* met hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D*, *P*, *Q*, *G* en *H*.
P is het snijpunt van *AF* en *BE*, *Q* is het snijpunt van *EG* en *FH*. Zie figuur 7.
In figuur 8 is *L* apart getekend. Deze figuur staat ook op de bijlage bij de vragen 15, 16, 17, 18 en 19. Bij de uitwerking van de vragen kun je hiervan gebruik maken.

figuren 7 en 8

figuur 7



figuur 8



Op hoogte *h* boven vlak *ABCD* wordt een vlak *V* aangebracht evenwijdig aan grensvlak *ABCD*.
Als $0 < h < 6$ snijdt vlak *V* een aantal grensvlakken van het lichaam.
De snijlijnen van *V* met die grensvlakken vormen een veelhoek *W*.

3p **15** Teken het bovenaanzicht van *L* op ware grootte. Zet de letters erbij.

3p **16** Teken voor $h = 4$ de veelhoek *W* op ware grootte. Deze veelhoek mag in het bovenaanzicht getekend worden.

Er is een waarde van *h*, met $h > 3$, waarvoor de oppervlakte van veelhoek *W* gelijk is aan 25.

6p **17** Bereken deze waarde.

5p **18** Bereken de hoek tussen de vlakken *APQH* en *BPQG*. Geef het antwoord in gehele graden.

5p **19** Bereken de inhoud van *L*.

Opgave 5 Lichaam

beginopgave of ze hadden teveel achter deze vragen gezocht.

Opgave 2 *Trailer-tafel* gaat over een tafel die bestaat uit een rechthoekig blok met daarboven een draaibare glazen plaat in de vorm van een kwart cirkel. Er worden vragen gesteld over de bewegingen van die plaat. De stelling van Pythagoras wordt gebruikt, er worden tekeningen gemaakt, de formule $d = 40 + 70 \sin \alpha$ moet bedacht worden en tenslotte wordt in een perspectieftekening gewerkt.
Op de vijf vragen behaalde men gemiddeld 60% van de scorepunten, waarbij op de goniometrievraag slechts 30% van de punten werd behaald.

Opgave 3 *Schaduw* betreft een rechthoekige wand waarover zich, met een snelheid van 1 meter per uur, een schaduwvlak verplaatst. De vragen gaan over de oppervlakte van het verlichte deel *A* als functie van de tijd *t*. De slotvraag gaat over de snelheid waarmee de oppervlakte van het verlichte deel verandert en het tekenen van de bijbehorende grafiek. Velen kwamen niet op de gedachte om $A'(t)$ te bepalen en men behaalde op deze kennelijk abstracte slotvraag slechts 20% van de punten. Op *Schaduw* als geheel behaalde men 58% van de punten.

Opgave 4 *Fruitvliegjes* gaat over de formule

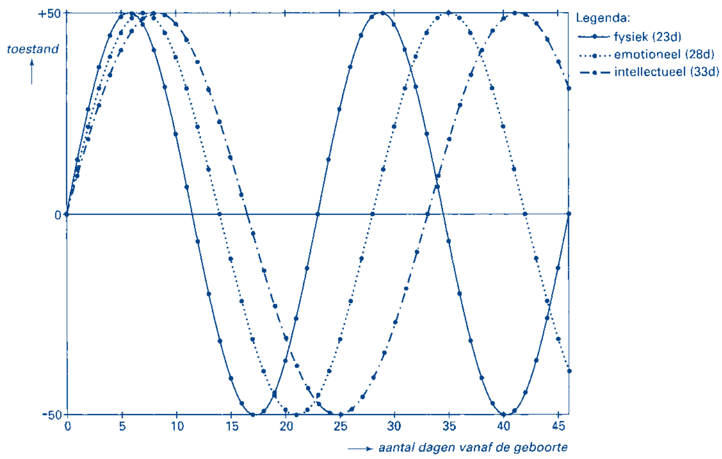
$$A(t) = \frac{3500}{1 + 34 \cdot (2{,}72)^{-0{,}14t}},$$

waarbij *A* het aantal fruitvliegjes per m^3 en *t* de tijd in dagen is. Het verloop van de grafiek is bij de opgave getekend.
In vraag 12 moet nagegaan worden na hoeveel dagen er voor het eerst meer dan 3000 fruitvliegjes per m^3 zijn. Op deze vraag werd goed gescoord: 74% van de punten.
In vraag 13 moet onderzocht worden wat de grenswaarde van $A(t)$ is. Hier behaalde men 48%.

Bioritme

Op een pagina op *Internet* staat te lezen dat ons leven beheerst wordt door een drietal toestanden, namelijk door onze fysieke, onze emotionele en onze intellectuele toestand. Op de ene dag voel je je fysiek (lichamelijk) beter dan op een andere dag. Deze 'fysieke toestand' kunnen we weergeven op een schaal van −50 (fysiek op dieptepunt) tot +50 (fysiek opperbest). Deze fysieke toestand varieert in de tijd volgens een sinusoïde. Ook de 'emotionele toestand' en de 'intellectuele toestand' variëren op een schaal van −50 tot +50 volgens een sinusoïde. Zie figuur 1.

figuur 1



Bij de geboorte van een mens zou elke cyclus zich in dezelfde begintoestand bevinden, zoals is weergegeven in figuur 1.
Tezamen bepalen de drie cycli het zogenaamde bioritme van een mens. Sommigen beweren dat het bioritme volledig vastlegt tot welke prestaties een mens op een bepaald moment in staat is. Zo zou je bijvoorbeeld kunnen uitrekenen op welke dag je het best kunt solliciteren.
Voor de fysieke cyclus is de periode 23 dagen, voor de emotionele cyclus 28 dagen en voor de intellectuele cyclus is de periode 33 dagen.

Het bioritme in figuur 1 betreft een pasgeboren baby. E is de emotionele toestand van de baby t dagen na de geboorte. Hierbij hoort een formule van de vorm $E = a \sin bt$.

3p **1** ☐ Geef de waarden van a en b.

Zodra de emotionele toestand beneden −25 komt, zou het moeilijker worden om de emoties onder controle te houden.

5p **2** ☐ Hoeveel procent van een periode heeft de emotionele toestand een waarde die kleiner is dan −25? Licht je antwoord toe.

F is de fysieke toestand van de baby.

5p **3** ☐ Onderzoek of F op de eerste verjaardag een dalend of een stijgend verloop heeft.

Opgave Bioritme

Redeneren met behulp van limieten leidt tot de grenswaarde 3500. In geval van een onderzoek waarbij grote waarden voor t worden ingevuld, is het belangrijk dat de kandidaat duidelijk/aannemelijk maakt dat nóg grotere waarden van t geen verdere toename van $A(t)$ te zien geven.
Bij vraag 14 moet de formule met t in dagen worden omgezet naar een formule met de tijd in uren. Dit werd moeilijk gevonden: men behaalde 49% van de punten. Sommige kandidaten hadden de formule overigens verder uitgewerkt dan in het correctievoorschrift:

$A(t) = \dfrac{3500}{1 + 34 \cdot (0{,}96)^t}$ en dat is natuurlijk eleganter.

Fruitvliegjes komt in meer uitgebreide vorm voor in het examen Natuur en Gezondheid en nog iets uitgebreider in het examen Natuur en Techniek.

Opgave 5 *Lichaam* is de opgave die door docenten het meest gewaardeerd werd: er is een mooie variatie aan vragen en een goede toetsing van de ruimtemeetkunde. Men behaalde op de opgave als geheel 42% van de 22 scorepunten. De vragen lopen van makkelijk naar moeilijk. Vraag 19 is in het correctievoorschrift op twee manieren uitgewerkt. Het kwam voor dat kandidaten een heel mooie derde uitwerking kozen, namelijk met een verlenging van lijnstuk QP tot het snijpunt R met vlak $ABCD$. Dan kan L opgevat worden als een prisma $ABGH.RQ$ − piramide $P.ARB$ + $\frac{1}{2}$kubus.$ABCD.EFGH$: de inhoud van L is 54 − 9 + 108 = 153.
De laatste vraag komt ook voor in het examen Natuur en Techniek, voorafgegaan door een vraag naar de uitslag van het lichaam.

Zie opgave 5 Lichaam

Euro-mix

Op 1 januari 2002 wordt in 11 landen van de *Europese Gemeenschap* het nieuwe muntstelsel van de euro ingevoerd. De eurolanden beschikken dan over hetzelfde betaalmiddel. Wel geeft ieder land zijn euromunten een eigen nationaal kenmerk door op één zijde van de munt een karakteristieke afbeelding aan te brengen (bijvoorbeeld koningin Beatrix in Nederland, Marianne in Frankrijk, ...). In elk euroland mogen echter alle munten van het eurostelsel worden gebruikt, ongeacht de afbeelding.
Zo zal er vermenging optreden van de eigen euromunten van een land met '*vreemde*' (= buitenlandse) euromunten.

Neem aan dat in een bepaald gebied op een zeker moment 10% van de aanwezige euromunten vreemd is.

Iemand wisselt in dit gebied een biljet van 10 euro tegen tien munten van 1 euro.
3p **17** Bereken de kans dat precies twee van deze munten vreemd zijn. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Een winkelier in ditzelfde gebied zegt er voor meer dan 95% zeker van te zijn dat van honderd willekeurig gekozen munten in zijn opbrengst het aantal vreemde munten tussen 5 en 15 ligt.
6p **18** Onderzoek of de winkelier gelijk heeft.

Doordat de euromunten van alle nationaliteiten door elkaar circuleren kan een vreemde munt via veel verschillende transacties in ons land terechtkomen. De volgende voorbeelden laten zien hoe een Spaanse euromunt na vier transacties binnen de 11 eurolanden, van Spanje in Nederland terecht kan komen.

	van		via			naar
Voorbeeld 1:	Spanje	→ Spanje	→ Frankrijk	→ Duitsland		→ Nederland
Voorbeeld 2:	Spanje	→ Italië	→ Nederland	→ Denemarken		→ Nederland

4p **19** Op hoeveel manieren kan een Spaanse euro na 15 transacties binnen de eurolanden van Spanje in Nederland terechtkomen? Licht je antwoord toe.

Burgers Bush is een dierentuin in Arnhem. Door de gunstige ligging bezoeken veel Duitsers deze dierentuin. Neem aan dat op een zeker moment de vermenging van euro's zover is dat voor het muntbezit van de bezoekers van Burgers Bush de onderstaande tabel van toepassing is.

tabel 2

	Nederlandse euromunten	Duitse euromunten	Overige euromunten
Nederlander	70%	20%	10%
Duitser	10%	85%	5%

Bij de dierentuin is een groot parkeerterrein. In het weekend is gemiddeld 40% van de auto's op het terrein van een Duitse eigenaar; 60% van de auto's is van een Nederlandse eigenaar. Bij het verlaten van het parkeerterrein moet er een muntstuk van 1 euro in een apparaat gedaan worden om de slagboom te openen.
Iemand beweert dat in de parkeeropbrengst van een weekend het percentage Duitse euro's gemiddeld groter is dan het percentage Nederlandse euro's.
5p **20** Onderzoek of deze bewering waar is.

Opgave Euro-mix

Havo wiskunde B1 en B1,2

In de eerste lichting van de profielen deden 437 kandidaten het examen B1 en 495 kandidaten het examen B1,2. Dat is 13%, respectievelijk 14% van de in totaal 3455 kandidaten.
Op de bespreking van de NVvW in Utrecht kwamen tien docenten bijeen. In het algemeen was men tevreden over de opgaven van beide examens: gevarieerd werk, redelijk stofdekkend, goede afspiegeling van wat leerlingen moeten kunnen, mooie overlap van B met B1,2 en van B1 met B1,2. Enkel met de grafische rekenmachine (GR) kun je al veel punten scoren. In B1,2 had men liever wat meer meetkunde gezien: er gingen slechts twee vragen over het lichaam waar bij B zes vragen gesteld werden! Over B1 werd veelvuldig opgemerkt dat het veel tekst(verklaring) is.
In het correctievoorschrift kon men zich redelijk vinden, ook met betrekking tot de verslaggeving van het gebruik van de GR. Deze verslaggeving door de leerling helpt de docent bij het natrekken van de antwoorden en geeft bij fouten in sommige gevallen de mogelijkheid een deelscore toe te kennen.
De docenten hadden alleen nog maar globaal naar de leerlingwerken gekeken. De tijd zou helaas leren dat de resultaten nogal achterbleven bij de verwachtingen van de docenten, vooral bij B1.

Het examen B1 bestond uit 20 vragen, verdeeld over de vijf opgaven *Bioritme*, *Bestrijdingsmiddelen*, *Fruitvliegjes*, *Bloemenvaas* en *Euro-mix*.
Het examen B1,2 telde 18 vragen, verdeeld over *Bioritme* (identiek met B1), *Trailer-tafel* (ook in B, maar uitgebreider), *Fruitvliegjes* (als in B1, plus extra vraag), *Lichaam* (slotvraag komt ook voor in B) en *Wortelfuncties*.
Op de gemeenschappelijke vragen van B en B1,2 scoorde de B-populatie iets hoger dan de B1,2-populatie, maar op het specifieke deel van B1,2 viel de score erg tegen. De vragen van *Wortelfuncties* zijn

In een ander onderzoek werd niet alleen gekeken naar het geboortegewicht maar ook naar het gewicht van baby's op 1-jarige leeftijd. Het resultaat van dit onderzoek staat in tabel 1 hieronder vermeld.

tabel 1

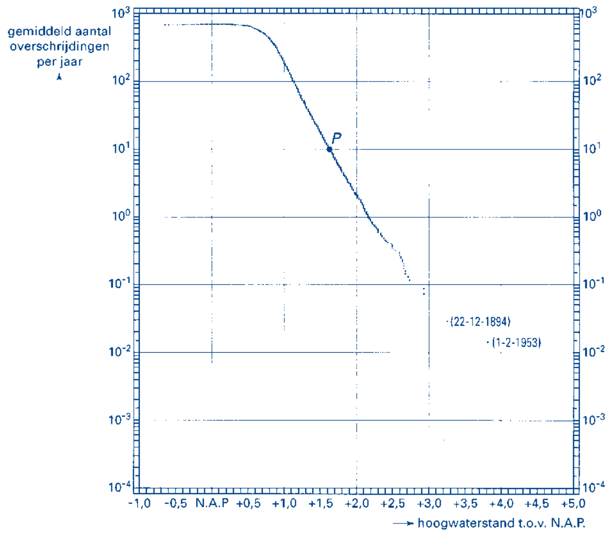
		gewicht na 1 jaar (in kilogrammen)						
		8 – 9	9 – 10	10 – 11	11 – 12	12 – 13	13 – 14	totaal
geboortegewicht (in kilogrammen)	2 – 3	8	40	66	38	11	0	163
	3 – 4	3	16	64	93	70	7	253
	4 – 5	2	7	49	60	72	32	222
	totaal	13	63	179	191	153	39	638

Uit tabel 1 kunnen we bijvoorbeeld aflezen dat er bij dit onderzoek 7 baby's waren van wie het geboortegewicht tussen 4 en 5 kilogram lag en het gewicht na 1 jaar tussen 9 en 10 kilogram.

5p **9** Onderzoek met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier of het 'gewicht na 1 jaar' bij benadering normaal verdeeld is.

Met behulp van deze hoogwaterstanden is figuur 2 gemaakt. Deze figuur staat ook vergroot op de bijlage. Op de horizontale as staat de waterhoogte in meter ten opzichte van N.A.P. Op de verticale as staat op een logaritmische schaal het gemiddelde aantal keren per jaar dat deze waterhoogte bereikt of overschreden wordt, kortweg het aantal overschrijdingen genoemd. Zo is bijvoorbeeld bij punt *P* te zien dat in deze periode het water gemiddeld 10 keer per jaar een hoogte heeft bereikt van 1,65 meter boven N.A.P. of hoger.

figuur 2



De op een na hoogste waterstand in de onderzochte periode werd gemeten op 22 december 1894.

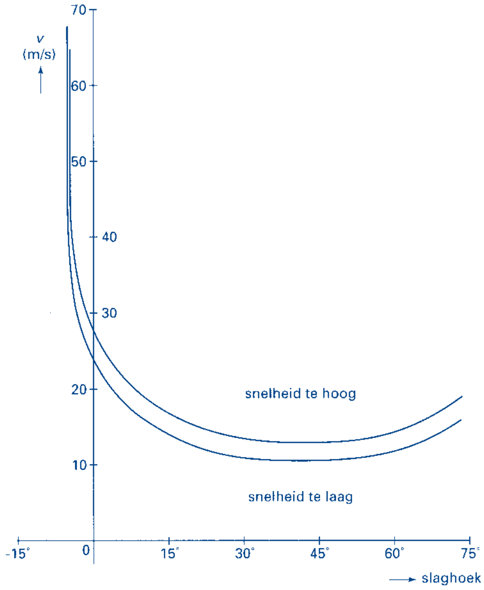
3p **12** Verklaar waarom het bijbehorende punt is getekend bij een gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van ongeveer 0,03.

Deel van opgave 2 Geboortegewicht / Deel opgave 3 Hoog water

slecht gemaakt. Voor B1,2 stelde de CEVO vast dat N = 1,6 moest zijn: gemiddeld cijfer 6,0 en 34% onvoldoenden.
Op de meeste gemeenschappelijke vragen van B1 en B1,2 scoorde de B1,2-populatie beduidend hoger dan de B1-populatie. Voor B1 koos de CEVO voor N = 2,5 waarmee het gemiddeld cijfer op 6,1 kwam met 33% onvoldoenden.
Hierna wordt aandacht besteed aan de bij dit artikel afgedrukte opgaven *Bioritme* en *Euro-mix*.
Bioritme is een opgave waarmee wordt getoetst of de kandidaten verschillende eindtermen van het subdomein *Periodieke functies 1* beheersen, in combinatie met eindtermen uit het domein *Vaardigheden*.
Voor vraag 1 is de formule behorend bij de emotionele toestand $E = a \sin bt$ al gegeven om voldoende veiligheid in te bouwen voor de vragen 2, 3 en 4, althans dat was de bedoeling. Men zou denken dat vrijwel iedere kandidaat een goede beantwoording van deze vraag zou geven, misschien op een factor 2 na voor *b*. Uit de analyses bleek echter dat bij B1 slechts 30% en bij B12 61% een volledig goed antwoord gaf.
Vraag 2 geeft diverse mogelijkheden voor de beantwoording: op de GR $y = 50 \sin (\frac{2p}{28} t)$ en $y = -25$ invoeren en de *t*-coördinaat van de beide snijpunten bepalen; traditioneel oplossen van de vergelijking $\sin x = -\frac{1}{2}$; of zelfs door in de grafiek de lijn $E = -25$ te tekenen en te meten: 2 cm van de 6 cm geeft 33%.
Als algemene regel is in het correctievoorschrift aangegeven dat kandidaten er verslag van dienen te doen hoe zij de GR gebruiken. Belangrijk is dat de docent kan verifiëren hoe de GR is gebruikt en tot welke tussentijdse en eindantwoorden dit leidt. B1 behaalde op vraag 2 35% en B12 40% van de punten, waar de constructeurs op zo'n 60% hadden gerekend.
Vraag 3 geeft als mogelijke beantwoording een redenering dat de gehele verjaardag in het laatste kwart van een periode van de fysieke toestand *F* ligt en dus een stijgend verloop heeft. Bij een onderzoek met de GR wordt de formule $y = 50 \sin (\frac{\pi}{14} t)$ ingevoerd met

In een artikel over dit onderwerp stond de volgende grafiek. In deze figuur 4 heeft men weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet, volgens figuur 4, de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Figuur 4 staat ook op de bijlage.

figuur 4



Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/uur.
4p **17** Teken in de onderste figuur op de bijlage de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal. Licht je antwoord toe met behulp van figuur 4.

Neem in vraag 18 en 19 aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h:

$$h = -\frac{5{,}16}{v^2} \cdot a^2 + 0{,}18 \cdot a + 2{,}50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leqq 1$ is. Volgens figuur 4 is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur hier erg onnauwkeurig is getekend.
6p **18** Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste 1 decimaal nauwkeurig. Licht je antwoord toe met een berekening.

Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v.
2p **19** Welke getallen moet je in bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

Deel van opgave 4 De service

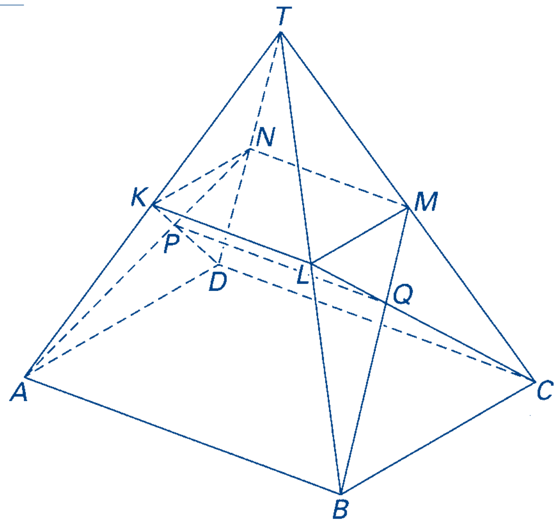
bijvoorbeeld het domein [360, 370] en het bereik [−50, 50]. En dan maar inzoomen op de eerste verjaardag om het verloop te zien, of door aldaar een raaklijn te tekenen. In deze context moet een jaar uiteraard niet op 360 dagen gesteld worden, zoals bij economie en handelswetenschappen wel om praktische redenen gedaan wordt. Deze vraag werd redelijk goed gemaakt, zowel bij B1 als bij B1,2.
Vraag 4 is een productieve vraag: goed lezen, goed doortellen, goede formules gebruiken en tenslotte de gevonden waarden van t vertalen in de goede data. Als je niet uitkijkt, zit je er zo een dag naast.
Op *Bioritme* als geheel behaalde B1 45% en B12 55% van de in totaal 20 scorepunten.

Euro-mix betreft de actualiteit van de invoering van euromunten en de verspreiding over de 11 landen van de *Europese Gemeenschap*. Met deze context wordt een aantal eindtermen getoetst van het domein *Tellen en kansen* en het domein *Kansrekening en statistiek*, in combinatie met eindtermen uit het domein *Vaardigheden*.
In vraag 17 kan de kandidaat kiezen of hij de GR gebruikt voor de binomiale verdeling met $n = 10$ en $p = 0{,}1$ en kijkt naar de kans op twee successen, of dat hij de volgende berekening maakt

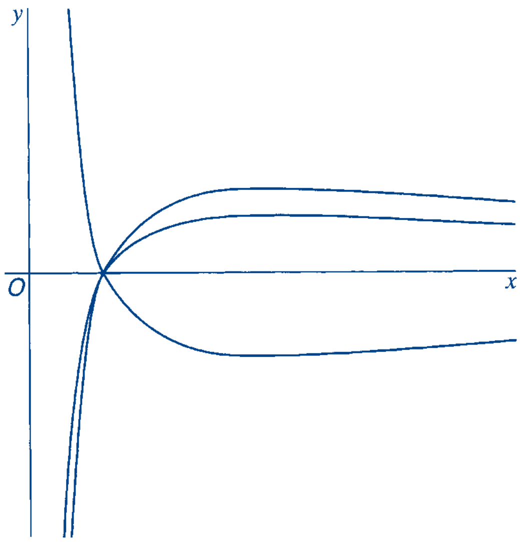
$$0{,}1^2 \times 0{,}9^8 \times \binom{10}{2} \approx 0{,}19.$$

Vraag 18 toetst het gebruik van de cumulatieve binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0{,}1$ op de GR. De kans op 6, 7, ..., 14 successen is 87%, dus de winkelier heeft ongelijk. Deze vraag is niet goed begrepen: men behaalde gemiddeld slechts 13% van de punten. Een rechtstreekse vraag naar de kans dat het aantal vreemde munten tussen 5 en 15 ligt, zou wellicht betere resultaten gegeven hebben. Als ‘tussen 5 en 15’ opgevat werd als inclusief 5 en 15, kostte dit een punt.
Vraag 19 handelt over het aantal mogelijke routes van een euromunt. De kandidaten haalden slechts 30% van

figuur 2



figuur 3



Figuur 2, opgave 3 / Figuur 3, opgave 4

de punten. Werd hier met deze grote aantallen landen en transacties misschien te veel generalisatie gevraagd? Had de vraag zich beter kunnen beperken tot bijvoorbeeld drie transacties binnen de landen Spanje, Frankrijk, België en Nederland? Het voordeel is dan dat de kandidaat met een boomdiagram de situatie eerst kan visualiseren.
Vraag 20 is een productieve vraag over hoe je uit een verdeling van muntsoorten in een soort automaat iets kunt afleiden over de gebruikers van de automaat. In de automaat blijken 46% Nederlandse en 46% Duitse euro's te zitten, dus de bewering is niet waar. Deze slotvraag is goed gemaakt. Door de tegenvallende resultaten op vraag 18 en vraag 19 haalde men op Euromix als geheel slechts 34% van de punten.

Vwo wiskunde A

Algemeen beeld
Na een jaar waarbij het gemiddelde voor het centraal examen wiskunde A 6,8 was, kon het dit jaar eigenlijk alleen maar tegenvallen wat betreft dit gemiddelde. De boodschap die vorig jaar door nogal wat docenten was meegegeven aan de examenmakers was dat het dit jaar wel wat moeilijker mocht. Zodoende was het niet verwonderlijk dat de gemiddelde score dit jaar 6,2 opleverde. Omdat het percentage onvoldoendes na analyse van de 2255 kandidaten in de steekproef 29 bleek te zijn, uitgaande van een normeringsterm N = 1, was er geen reden om, ondanks de duidelijke stijging in moeilijkheidsgraad, af te wijken van de beoogde normering.

Na afloop van het examen kon hier en daar kritiek op de samenstelling van het examen vernomen worden. Die kritiek betrof de spreiding over de stof (men miste bijvoorbeeld goniometrie en lineair programmeren) en de keuze van het startvraagstuk. Bij nader inzien lijkt met name dit laatste punt van kritiek hout te snijden want ook van de kant van leerlingen werd vaak

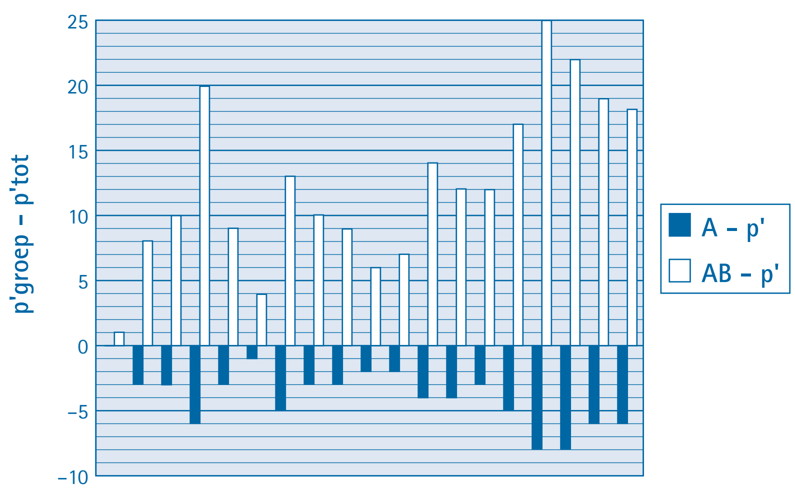
geopperd dat deze eerste opgave *Bierbrouwen* veel tijd kostte, in ieder geval meer tijd dan de makers voor ogen stond. Achteraf bezien was het wellicht beter geweest de opgave *Geboortegewicht* als opener te laten functioneren.

Ook was er kritiek op de opgave *De service*. Deze kritiek behelsde vaak dat deze opgave wiskunde B dan wel natuurkunde zou zijn. Niet te ontkennen valt dat de parabolische baan van een bal met name bij natuurkundigen een behoorlijk bekend en frequent bestudeerd verschijnsel is, maar toch moet geconstateerd worden dat de vragen die er in dit examen over dit fenomeen aan de orde gesteld worden, vragen zijn die ook door leerlingen met een minder exacte achtergrond begrepen moeten kunnen worden. Ondanks het feit dat de context uit de wereld der fysica komt, blijft deze opgave in de ogen van de samenstellers een opgave die voorgelegd kan en mag worden aan een gemiddelde wiskunde-A-leerling. Uit de analyse blijkt daarentegen dat met name deze opgave door leerlingen met alleen wiskunde A in het pakket slechter gemaakt is dan door leerlingen die ook wiskunde B volgen. In de onderstaande figuur is te zien dat met name de vragen 16 t/m 18 een grote afwijking tussen beide categorieën leerlingen opleveren. De gemiddelde score over het hele examen was bij leerlingen met B in het pakket 6,4 (en 6% onvoldoende) waar de leerlingen zonder B het moesten doen met gemiddeld 5,9 en 37% onvoldoende.

Enkele vragen onder de loep genomen

Vraag 9
Dit was in wezen een standaardvraag. Hier moest met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier het al of niet normaal verdeeld zijn onderzocht worden. Na afloop van het examen werd er hier en daar gemopperd op het correctievoorschrift dat aangaf dat 1 punt in mindering gebracht moest worden in het geval dat een leerling de waarnemingen niet, zoals te doen gebruikelijk op normaal waarschijnlijkheidspapier, boven de rechter klassengrenzen geplaatst had. Argument dat bij deze kritiek gehanteerd werd, was dat, om enkel het normaal verdeeld zijn van de gewichten te kunnen constateren, het voldoende is als deze waarnemingen op dit type papier op een rechte lijn liggen. De rechter klassengrenzen spelen pas een rol op het moment dat aflezen van het gemiddelde aan de orde komt. Deze opmerking is waar maar dat neemt niet weg dat een leerling die, zonder opmerking of nadere toelichting afwijkt van het normale gebruik van normaal waarschijnlijkheidspapier, niet inzichtelijk maakt dat hij doorziet waarom dat in deze situatie toegestaan is. Een leerling die zijn niet plaatsen boven de rechter grenzen van een adequate toelichting voorziet, heeft daarentegen een alternatieve en juiste oplossing gegeven waarvoor het volledige puntental kan worden toegekend.

Zie deel van opgave 2 Geboortegewicht op p. 49



Over leesbaarheid en omvang van het examen en mate van detaillering van het correctievoorschrift was de meerderheid van de docenten die zich daarover hebben uitgelaten, te spreken. Met name dit laatste is prettig om te weten omdat we de laatste paar jaren bewust er naar streven het correctievoorschrift zo veel als mogelijk te voorzien van een 1-puntsonderverdeling. Verder plaatsen we daar waar dat in onze ogen aan de orde is, bij verschillende antwoorden in het antwoordmodel kanttekeningen in de vorm van opmerkingen of 'indien-'zinnen die de gebruiker nog extra helderheid moeten verschaffen.

Vraag 12
Een vraag voor slechts 3 punten maar daarmee niet bepaald een eenvoudige. Uit de analyse na afloop bleek dat deze vraag de laagst scorende vraag van dit hele examen was. Uit reacties uit den lande bleek dat er leerlingen geweest waren die door de passage 'Verklaar ...' op het verkeerde been gezet waren en zich verloren in uitgebreide maatschappelijke of geografische uitweidingen. Toch moet achteraf geconstateerd worden, dat het waarschijnlijk niet de formulering als wel de aard en de ingewikkeldheid van het probleem is dat hier de lage score verklaart. Bij deze vraag was met behulp

van de analyse goed te constateren dat er een behoorlijke positieve correlatie was tussen de score bij deze vraag en de score op het hele examen.

Zie deel van opgave 3 Hoog water op p. 49

Vraag 19
De laatste vraag van dit examen leverde een gemiddelde score van 39% op, ook niet bepaald een score die duidt op een als eenvoudig ervaren vraag. Vermoedelijk is de verklaring hiervoor gelegen in de 'strenge' indien-zin waarmee het antwoord van deze vraag in het correctievoorschrift besluit. Zonder toelichting bleef er van de 2 punten bij deze vraag niets meer over. Dit werd door een enkeling als nodeloos streng ervaren maar in de ogen van de makers een noodzakelijkheid als de vraag, zoals hier het geval was, uitdrukkelijk van de toevoeging 'Licht je antwoord toe' is voorzien. Als de toelichting als overbodig ervaren wordt, lijkt kritiek op de vraag eerder aan de orde dan kritiek op het correctievoorschrift.

Zie deel van opgave 4 De service op p. 50

Vwo wiskunde B

Dit examen is over het algemeen als een goed examen beoordeeld, met een redelijke spreiding over de stof en een goede afwisseling van routinevragen en originele opgaven.
De leerlingenresultaten zijn echter lager dan verwacht. Goede leerlingen hebben goede resultaten verkregen, terwijl de resultaten van vele zwakke leerlingen onder het schoolonderzoek gekomen zijn.
Bij de pretest van twee jaar geleden waren de p'-waarden aanzienlijk hoger, bij de vragen 7, 8, 10, 12, 13 en 14 zelfs 10% of meer. De pretest is afgenomen bij leerlingen van voor de basisvorming.
De omvang van het examen is niet te groot gebleken.

Evenals vorig jaar heeft 41% van alle vwo-kandidaten het wiskunde B-examen afgelegd.

Het examen bestond uit 4 opgaven met in totaal 15 vragen.
De gemiddelde score van de 1976 leerlingen uit de steekproef was 47 punten; vorig jaar was dit 53.
De CEVO heeft besloten de N-term te stellen op 1,3. Hierdoor is het percentage onvoldoenden 41.

Opgave 1, een parameterkromme, was een goede binnenkomer met standaardvragen. In vraag 1 moest de kromme getekend worden, nadat enige bijzondere punten berekend waren. In vraag 2 moest de gegeven vergelijking bewezen worden, wat de kandidaten nodig hadden om de inhoud van een omwentelingslichaam te berekenen in vraag 3. Deze vragen zijn goed gemaakt, in tegenstelling tot vraag 4 waarin de leerlingen a moesten berekenen in $y = ax$ zo dat de lijn precies één punt met de kromme gemeen heeft. De p'-waarde van deze vraag is 34, terwijl 51% van de kandidaten hier geen raad mee wist.

Opgave 2 begon met een goniometrische vergelijking in vraag 5. Vraag 6 betrof het bewijs van het dalend zijn van een goniometrische functie f. Vraag 8 was een berekening van de oppervlakte van een vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de x-as en een verticale lijn. Voor de berekening van deze integraal moest in vraag 7 een andere schrijfwijze van het functievoorschrift van f aangetoond worden. De resultaten in deze opgave waren nogal mager. Bijna de helft van de kandidaten wist niets te beginnen met de vragen 7 en 8.

Opgave 3 was dit jaar de stereometrie-opgave. Vraag 9, het berekenen van de inhoud van *ABCD.KL* (zie de figuur op p. 51) werd teleurstellend slecht gemaakt, met een p'-waarde van 38. Vraag 10, de projectie van *KLMN.PQ* op het grondvlak lukte wel, evenals vraag 11, de afstand van MN tot ABT. Vraag 12 ten slotte, een originele vraag naar de vergelijking van lengten van cirkelbogen laat, zoals te verwachten was, een mager resultaat zien.

Zie *figuur 2 van opgave 3 op p. 51*

Opgave 4 is dit keer een verzameling van logaritmische functies:

$$f_a(x) = a\frac{\ln x}{x}.$$

In de figuur is voor enkele waarden van a de grafiek getekend.
Vraag 13 ging over de berekening van a met een gegeven maximum waarde 3 en vraag 14 over de berekening van a met een gegeven hoek waaronder de grafiek de x-as snijdt. Bij deze vraag moet men rekening houden met twee oplossingen. Deze vragen hadden een mager resultaat met respectievelijk een p'-waarde van 56 en 49.
Vraag 15 was een echte uitsmijter van het examen met een p'-waarde van 26, terwijl 64% van de kandidaten hier geen raad mee wist. Het ging om een horizontale lijn $y = p$, die de y-as snijdt in A en de grafiek van f_2 in B en C, zo dat $AC = 2\ AB$. De waarde van p moest berekend worden.

Zie *figuur 3 van opgave 4 op p. 51*

Vorig jaar hebben de samenstellers van dit examen geschat dat de gemiddelde score 52 zou worden, terwijl dit nu 47 is geworden.

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Lustrumcongres 2000
Vierde Uitnodiging

Vierde uitnodiging
Dit is de vierde aankondiging voor het lustrumcongres en de jaarvergadering 2000 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Dit jaar bestaat de Vereniging 75 jaar. Bovendien is 2000 uitgeroepen tot het Jaar van de Wiskunde. Vandaar dat het dit jaar een tweedaags lustrumcongres wordt, inclusief de mogelijkheid tot overnachten.

Reserveer, als u dat nog niet gedaan heeft, de volgende data en tijden in uw agenda:
vrijdag 17 november vanaf 15:30 uur tot en met zaterdag 18 november 2000 16:00 uur.

Plaats: het *Educatorium van de Universiteit van Utrecht*, te Utrecht.

Het thema van dit congres is:

Wiskundeonderwijs over de grens
Met drie subthema's:
wiskundeonderwijs over de *lands*grenzen
wiskundeonderwijs over de *vak*grenzen
wiskundeonderwijs over de *tijds*grenzen

Programma

Vrijdag 17 november:

vanaf 15:30:
• Ontvangst met koffie en thee.

16:00-16:15:
• Officiële opening.

16:15-16:30:
• Presentatie van het Jubileumboek.
16:30-16:40:
• Huishoudelijke mededelingen.

16:40-17:25:
Lezing I, *Wiskundeonderwijs over de landsgrenzen,*
door Prof. Dr. Jan de Lange

17:35-18:20:
• Workshops ronde I

18:30-22:30:
• Doe-Markt

• Buffet-maaltijd overlopend in een Feestavond.

Zaterdag 18 november:

Vanaf 9:30:
• Ontvangst met koffie en thee.

10:00-10:30:
• Feestrede door de Voorzitter.

10:30-10:40:
• Huishoudelijke mededelingen.

10:40-11:25:
• Parallel-lezing II, *Wiskundeonderwijs over de tijdsgrenzen*
'Euclides' moeilijkste eeuw.'
Hoogte- en dieptepunten van het meetkundeonderwijs in Nederland in de twintigste eeuw,
door dr. Ed de Moor.

• Parallel-lezing II, *Wiskundeonderwijs over de tijdsgrenzen*
'De Nationale Doorsnede'.
Verslag van het projekt
door Prof. Dr. Jelke Bethlehem.

• Pauze / Markt / Activiteiten

12:05-12:50:
• Workshops ronde II

• Lunch / Markt / Activiteiten / afwikkeling Jaarvergadering.
De jaarvergadering is vrij toegankelijk voor alle leden.

Agenda jaarvergadering

1 Opening door de voorzitter mevr. drs. M. Kollenveld

2 Notulen van de jaarvergadering 1999 (zie Euclides 76-2)

3 Jaarverslagen (zie Euclides 76-2)

4 Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie 2000-2001 en benoeming van de nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat dhr. C. Garst en dhr. F.J. Appelman.

5 Bestuursverkiezing in verband met periodiek aftreden van
dhr. drs. S. Garst, mevr. drs. M. Kollenveld, dhr. W. Kuipers. Deze kandidaten stellen zich herkiesbaar en het bestuur stelt hen opnieuw kandidaat. Tevens treedt af en is niet meer herkiesbaar mevr. A. Aukema. Het bestuur stelt kandidaat mevr. L. de Schutter, docente Mendelcollege te Haarlem.

6 Bestuursoverdracht

7 Rondvraag
Aan leden die een vraag in de rondvraag willen stellen wordt verzocht deze op een nader aan te geven tijdstip schriftelijk in te dienen bij de voorzitter.

8 Sluiting door de voorzitter

13:55-14:40
• Workshops ronde III

14:45-15:30
• Lezing III, *Wiskundeonderwijs over de vakgrenzen*
'Wiskunde is wél leuk!' door Govert Schilling, wetenschapsjournalist.

15:35-15:55:
• Een uitsmijter gevolgd door de afsluiting door de Voorzitter.

Meer informatie en hoe u zich kunt aanmelden staat in Euclides 76-0, pagina 20 en verder, en natuurlijk op de website www.nvvw.nl

De Nationale Doorsnee 10 oktober 2000

De Nationale Doorsnee is een landelijk statistiekproject voor en door alle leerlingen van de brugklas en klas twee van het VO

Zoals u in de vorige nummers van Euclides heeft kunnen lezen is 10 oktober 2000 de dag dat bekend wordt gemaakt wie 'De gemiddelde leerling van Nederland' is en welke klas daar de beste voorspelling over heeft gedaan. Hierna volgt nog eens de belangrijkste informatie over De Nationale Doorsnee.

De opzet van De Nationale Doorsnee

De Nationale Doorsnee is een landelijk statistiekonderzoek voor, door en naar alle leerlingen van de brugklas en klas twee van het VO. Centraal staat de vraag: Wie is de gemiddelde leerling van Nederland? Om dit te weten te komen vullen de leerlingen een vragenlijst in met vragen over zichzelf. De vragen gaan onder andere over muziek, geld en school. Dit onderdeel wordt de meting genoemd. Op basis van de meting doen ze in groepjes een voorspelling over kenmerken van 'de gemiddelde leerling' van Nederland.
DND is opgezet als wedstrijd; de leerlingen voorspellen de gemiddelde kenmerken van de gemiddelde leerling van Nederland. Met deze voorspelling kunnen zij prijzen winnen. Gedacht wordt aan een schoolreis naar een attractiepark. Per school worden door een coördinator op school alle gegevens tot één bestand samengevoegd en per e-mail opgestuurd naar het CBS. Als alle leerlingen van klas 1 en 2 meedoen zullen er zo'n 3,6 miljoen gegevens verstuurd worden.
Alle deelnemende scholen sturen op 10 oktober 2000 hun bestanden op naar het CBS. Daar staat een heel team klaar om alle gegevens te verwerken en te analyseren zodat 's avonds bekend is welke klas de beste voorspelling heeft gedaan en wie de gemiddelde leerlingen van Nederland zijn.
Een onderzoek op deze schaal is uniek en kan in Nederland alleen uitgevoerd worden door een organisatie als het CBS.

Het doel van De Nationale Doorsnee

Doel is om statistiek op een leuke manier aan de leerlingen te presenteren. Om het onderzoek dicht bij de beleving van de jongeren zelf te houden is er voor gekozen ze een onderzoek naar zichzelf en naar hun leeftijdgenoten te laten doen.

De Nationale Doorsnee en computers

In De Nationale Doorsnee wordt uitgegaan van geïntegreerd computergebruik. Leerlingen vullen zelf hun antwoorden in op een elektronische vragenlijst. De speciaal voor dit project ontwikkelde software wordt gebruikt om de gegevens van de meting en de voorspelling om te zetten in bestanden en maakt tevens data-overzichten van uw eigen klas. De bestanden worden via e-mail opgestuurd naar het CBS.

Eventueel kunt u ook werken met een papieren versie van de vragenlijsten, die is in het aanvullende lesmateriaal bijgevoegd. Als uw klas dus niet over computers kan beschikken kunnen de leerlingen toch meedoen aan DND. Het enige dat u echt nodig heeft is een computer met e-mail, zodat u de gegevens kunt verwerken en opsturen.

Deelname aan De Nationale Doorsnee is gratis

Het project is zo opgezet dat u er gratis aan kunt deelnemen. Dit is mede mogelijk dankzij de bijdragen van vele sponsors.

Praktische informatie

- Inschrijven gaat via de inschrijfkaart.
- De Meting en de Voorspelling samen kost per klas één lesuur.
- Het opsturen van de databestanden naar het CBS kost u enige minuten.
- Per school moet er een coördinator worden aangesteld. Deze persoon ontvangt het lespakket en is degene die de klassenbestanden als één bestand per e-mail opstuurt naar het CBS.
- De coördinator ontvangt begin oktober de lespakketten. Op 10 oktober worden de bestanden opgestuurd naar het CBS. Zo is er voldoende tijd om alle klassen gebruik te laten maken van de computers.
- Het speciaal ontwikkeld aanvullend lesmateriaal kunt u facultatief gebruiken in lessen voorafgaand aan of volgend op 10 oktober.
- Op een aparte website zullen de verzamelde data in overzichten te vinden zijn.
- Algemene informatie is te vinden op: www.nationaledoorsnee.nl
- De onderwijsinspectie beveelt meedoen aan de DND positief aan.
- Het lespakket bevat: docentenhandleiding, software en boekje met aanvullend lesmateriaal.

Verslag examen

[J.M. de Geus, Warnsveld]

Vraag	VWO-A	VWO-B	HAVO-A	HAVO-B
In vergelijking met de vorige jaren is het niveau van het CSE 2000:				
lager	3	0	78	8
gelijk	71	55	16	36
hoger	26	45	6	56
De spreiding over de stof is:				
slecht	76	1	6	55
voldoende	24	72	85	39
goed	0	27	9	6
Het aantal routinevragen is:				
te klein	38	3	0	53
goed	62	93	85	41
te groot	0	4	15	6
Het aantal originele vragen is:				
te klein	2	6	9	2
goed	67	91	91	48
te groot	31	3	0	50
Het correctievoorschrift is:				
te gedetailleerd	2	0	1	0
goed	90	71	94	86
te weinig gedetailleerd	8	29	5	14
De keuze van het startvraagstuk is:				
slecht	64	0	6	32
matig	31	2	28	41
goed	5	98	66	27
De leesbaarheid van de vraagstukken is in het algemeen:				
slecht	41	0	1	1
voldoende	52	22	46	64
goed	7	78	53	35
De omvang van het CSE 2000 was:				
te gering	0	0	10	0
goed	61	66	90	63
te groot	39	34	0	37

besprekingen 2000

Examenbesprekingen

De deelname aan de regionale besprekingen voor de havo- en vwo-examens wiskunde, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, was dit jaar voorbehouden aan docenten die hun kandidaten hadden opgeleid volgens de oude bedeling. De tweetrapsraket van het kabinet leidt tot een - gelukkig tijdelijke - tweedeling in Examenland: in totaal waren er dit jaar vier soorten vwo-examens en vijf soorten havo-examens, per tijdvak! Elders in dit blad treft u de ins en outs van de 'nieuwe' examens aan.
Dankzij de veelal voortreffelijke kwaliteit van de op de examens gerichte sites van het www is vrijwel iedere docent in staat (geweest) examens te downloaden, verslagen van centrale besprekingen te bekijken, zijn gal te spuwen dan wel zijn lof te uiten. Doordat de examenperiode dit jaar zeer kort was, heeft het medium Internet velen hopelijk heel wat stress bespaard!
Het is daarom verheugend te mogen constateren dat de belangstelling voor de besprekingen onverminderd hoog blijft. Natuurlijk, op een aantal scholen werden al havo-A1,2 en -B1(,2) examens afgenomen waardoor de bijbehorende docenten wegbleven; zij zijn volgend jaar vanzelfsprekend weer van de partij.

'Zeer geschikt examen, misschien wel iets te eenvoudig'

De havo-A bijeenkomsten trokken ongeveer 160 deelnemers, rond de 100 bezochten de havo-B besprekingen. 120 Docenten kwamen op vwo-A af en 100 woonden vwo-B bij.
Het aantal deelnemers bij havo-A, vwo-A en B is lager dan vorig jaar, havo-B werd drukker bezocht.
In de bijgevoegde tabel staan de resultaten van de traditionele enquête. Alle getallen daarin zijn percentages.

Ook nu weer zijn er bij de meeste besprekingen verslagen gemaakt. Deze zijn aan de CEVO gezonden met het verzoek de daarin gemaakte opmerkingen onder andere te gebruiken bij het opstellen van toekomstige examens.
Ook bij het vaststellen van de cesuur kan de CEVO gemaakte opmerkingen laten meewegen.
Daarna zijn de verslagen naar ondergetekende door-gezonden. Het nu volgende is een naar ik hoop representatieve samenvatting.

Havo wiskunde A

'Zeer geschikt examen, misschien wel iets te eenvoudig'. Zo kenschetst de notulant van de Amsterdamse bijeenkomst de stemming bij de 40 aanwezigen. Met dat 'eenvoudig' verwoordt hij een landelijk gevoelen: op de andere acht vergaderingen denkt men er net zo over. De Amsterdammers vonden het, samen met de Goesenaren, ook goed leesbaar: 'Houen zo!' In Rotterdam vermoedde men opzet: 'Het is het laatste examen "oude stijl"', beweerde men daar. In Den Haag was men in anderhalf uur klaar met vergaderen.
Met name de docenten buiten de Randstad oordeelden wat strenger: 'het was een oppervlakkig examen' en: 'veel te makkelijk!!' zijn twee delen van citaten. Hetgeen bewijst dat je het nooit iedereen naar de zin kunt maken.
Opvallend was, dat er meer kritiek op het CV (correctie-voorschrift) was dan op het examen zelf, al kan blijkens de enquête 94% van de aanwezigen ermee uit de voeten.
Van opgave 1 bijvoorbeeld vond men de normering bij vraag 3 verwarrend. Kandidaten die B^2 berekenden door elk element van B te kwadrateren kregen menigmaal 3 punten toegeworpen! Vooral de vergadering in Arnhem hekelde deze handelwijze. Ook vond men daar, ofschoon dat schoorvoetend al gebeurt, dat voor de hand liggende foutieve antwoorden, waar een even zo verkeerde gedachtegang achter schuil gaat, in het CV moeten worden genoemd mèt bijbehorende aftrek. Bij opgave 2 werd vermoed dat de opsteller van het CV wèl zijn wiskunde beheerst, maar niet weet hoe een havo-A leerling in elkaar steekt. De oplossingsstrategie van vraag 7 werd in Den Bosch als onrealistisch omschreven. En men vond het jammer dat de normale verdeling (vraag 6) er (in de normering) nogal bekaaid van af kwam, dit jaar. Het toegestane gebruik van de GR was in de norm van vraag 6 zichtbaar. Sommigen vonden 3 punten 'ineens' nogal ongenuanceerd.
Opgave 3, luchtdrukte, stond ook in het A1,2 examen. Maar het begrip 'histogram' was -formeel- niet bij alle

A1,2-kandidaten bekend, zodat zij de punten van vraag 8 cadeau kregen en de A-kandidaten deze gewoon moesten verdienen, terwijl velen van hen vertrouwder zijn met het begrip 'staafdiagram'. De geëiste motivering van $b = 100$ werd kinderachtig genoemd.
Over opgave 4 zijn weinig opmerkingen gemaakt. Een enkeling vond het jammer dat de tijdsintervallen in tabel 1 gelijk waren. En het begrip 'leegloper' heeft er een nieuwe betekenis bij.
De enquête in opgave 5 maakte meer tongen los. Vooral de definitie van het woord 'bezoek' deed menigeen naar het woordenboek grijpen: 'Als je bij iemand op bezoek gaat, dan is die persoon thuis, anders is het geen bezoek', formuleerde men in Amersfoort. Daar bezoekt men dus mensen, en geen huizen. Die dubbelzinnigheid leidde hier en daar tot verkeerde redeneringen bij vraag 19, waardoor de normering niet bruikbaar was. Wie bij vraag 16 wat probeert, de getallen 64 en 94 vindt èn die controleert, krijgt het volle pond. Is die mogelijkheid al door de auteurs bedacht? Zo'n oplossing is niet sjiek, vond men in Rotterdam; hou er in de vraagstelling rekening mee.

Havo wiskunde B

'Het ging de laatste jaren juist wat beter. Waarom dan nu, net dit laatste jaar, zo'n examen? Er is toch al niets voor gezakten geregeld.' Deze verzuchting uit Amsterdam is tekenend voor de verslagen van het havo-B examen. 'Veel meetkunde waarbij nogal wat inzicht wordt gevraagd', vindt Apeldoorn. Sommigen houden hun hart vast voor volgend jaar: dergelijke vragen met minder contacturen... Breed is de mening dat er weinig routine- en veel stapelvragen in het werk voorkomen. In Arnhem is men positief: 'Leuk examen, redelijk moeilijk voor leerlingen', zegt men daar.
Achteraf gezien valt het mee, de norm bij vraag 10 blijkt 'a slip of the pen' en wordt aangepast, het gemiddelde resultaat is behoorlijk. Bijna alle verslaggevers bekritiseren de startopgave ('Begin nooit met gonio...') en vinden de aandacht voor meetkunde bovenproportioneel. (48 van de 90 punten rekende een Groninger uit.)
'Met "Een functie" (Viel het op dat het havo-B examen als enige geen genummerde opgaven had?) breng je een schrikreactie teweeg', oordeelt iemand in Zwolle. Hoewel het een routinevraag was, had men hier graag iets anders gezien. Aan de opgave zelf mankeerde niets. In 'Trailer-tafel' daarentegen viel het menigeen op dat de foto van de trailertafel en de bovenaanzichten in figuur 2 en 3 niet spoorden. Bewust? Of was dit een vergissing en had de foto anders gemoeten? In elk geval leidde het, de verslagen lezend, hier en daar tot interpretatieproblemen. De afronding 'naar boven' in vraag 3 werd als overbodig gekenschetst, immers, in een praktische situatie als deze moet je altijd naar boven afronden. Vragen 4 en 5 werden als stapelvragen ervaren. De schaal 1:15 heet 'ongelukkig' en de perspectiefloze bakstenen op de bijlage kloppen niet met de balk. De normering geeft niet de denkwijze van de doorsneekandidaat weer. Aftreknorm bij voor de hand liggende fouten zou handig zijn geweest. Gelukkig scoorden heel wat kandidaten naar behoren.
Bij 'Schaduw' viel in een paar verslagen het woord 'ongelukkig'. 'Laat kandidaten in vraag 9 zèlf de formule bedenken, nu redeneren velen naar het antwoord toe', is de mening in Zwolle, Den Bosch en Amsterdam. Dat zoiets tot nieuwe problemen kan leiden, daarvan is men zich wel bewust. De (nog niet gerectificeerde) norm bij vraag 10 resulteert in heftige protesten; sommige verslagen zijn behoorlijk emotioneel op dit punt! De betrokkenheid van docenten bij (de resultaten van) hun kandidaten is overduidelijk. Een snelheid $S(t)$ noemen, dat doe je niet, vinden velen.

'Leuk examen, redelijk moeilijk voor de leerling'

De 'Fruitvliegjes' krijgen evenmin genade: 'Geen fraai voorbeeld van een examenopgave', kraait Zwolle en: 'Een vwo-A opgave!' oordeelt Den Haag. Jammer werd het gevonden, daar velen de grenswaarde 3500 berekenden, zij het door één grote waarde voor t in te vullen, dat de aftrek dan twee punten moest bedragen. 'De opmerking is jammer want de leerling geeft aan precies te weten wat er moet gebeuren', staat in het Rotterdamse verslag. De Groningse notulant vroeg zich af waarom vraag 12 niet gesteld was in de 'Bereken' of 'Onderzoek' vorm. De vraagvorm 'Na hoeveel dagen ...' nodigt uit tot proberen en slordig redeneren.
Gelukkig was daar 'Lichaam'. 'Een mooie opgave', vond men in Zwolle. 'Jammer dat figuur 7 (met kubus) niet op de bijlage stond'. Enige stapeling werd ook hier geconstateerd: vraag 15, 16 en 17 werden als zodanig genoemd. Het nakijken van vraag 18 en 19 werd als inspannend ervaren: het verslag van Den Bosch vermeldt: 'Moeilijk te volgen rekenwerk, meestal met verkeerde uitkomst.' Wat een geluk dat wij dan vaak toch nog punten mogen geven!

Vwo wiskunde A

'Redelijk te doen', 'Vreemd werk', 'Veel leestekst', 'Te weinig wiskundige vaardigheden', 'Lange teksten', 'Teksten kort houden en meer concreet', 'Veel onderwerpen gemist', 'Tevreden over het geheel'. Ziehier een bloemlezing van de over het algemeen korte verslagen. Bijna iedereen is tevreden over het niveau, zie

de enquête. Een enkeling vindt dat er teveel B-contexten in de A-examens zitten. 'Graag meer biologie en economie!' zegt hij. Ik verwijs naar het tweede tijdvak! De keuze voor 'Bierbrouwen' als startvraagstuk vindt de meerderheid ongelukkig. Veel kandidaten raakten hier onevenredig veel tijd en energie kwijt, zo lijkt het. Jammer is het dat, hoewel de figuur duidelijk een graaf laat zien, nergens wordt gehint richting matrixrekening. Nu mag je van vwo-ers enige creativiteit verwachten, maar ze volledig vrijlaten in hun modelvorming, en dan nog wel in de eerste opgave, dat is teveel gevraagd. Het nakijken van vooral vraag 3 werd 'moeizaam' genoemd. Overigens, een matrixgerichte oplossingsmethode was niet genormeerd; hadden de opstellers er zelf wel aan gedacht? (Ik herinner me een examenopgave uit de experimenteertijd van wiskunde-A over een zuiveringsinstallatie. Daarin werd ook gepompt en gelekt, mèt matrices; JMG)
Opgave 2 wordt slechts op kleine punten aangestipt. Met name het bij vraag 8 stilzwijgend veronderstellen dat de standaardafwijking niet is veranderd (maar het gemiddelde wel) ontmoet kritiek. Wie zorgvuldige antwoorden verwacht moet evenzo formuleren! Een lichte wenkbrauwfrons ook bij het CV van vraag 9. Er is geen enkele noodzaak om op iets anders te letten dan de lineariteit van de uitgezette punten. Er wordt immers niet naar een gemiddelde of standaardafwijking gevraagd. Daarom vond een aantal de 'min 1' bij vraag 9 onterecht.

'Keurig examen, goed te doen'

Een enkele methode schijnt de vuistregel ($np > 5 \wedge nq > 5$) voor het al dan niet mogen overstappen van de binomiale op de normale verdeling niet te noemen(?).
De waterstanden van opgave 3 -eveneens een nauwelijks bekritiseerde opgave - leidde in Amersfoort tot de opmerking waarom men twee keer een vraag met 'Verklaar' was begonnen. Dat bracht menigeen tot volslagen irrelevante uitwerkingen, omdat men fysische, geologische, enz. redenen bedacht.
De vierde opgave deed een notulant verzuchten: 'Hebben de opstellers ooit zelf getennist?' Ik geef de vraag gaarne door! (De foto is trouwens in spiegelbeeld afgedrukt! JMG.) Een aantal kandidaten had vraag 17 letterlijk genomen en, naar alle waarschijnlijkheid, de toelichting in figuur 4 van de opgave en niet op de bijlage gegeven. Jammer, maar dat kostte 2 punten.
Het CV van vraag 19 vindt iedereen ronduit kinderachtig. Dat scheelde veelal één punt.
Over het CV als geheel nog één opmerking: het wordt nu echt tijd dat het verschijnsel (on)nauwkeurigheid van antwoorden een principiële aanpak krijgt. Momenteel is er anarchie op dit punt. Verscheidene notulanten vragen om duidelijkheid.

Vwo wiskunde B

Uit alle verslagen blijkt waardering voor het examen. 'Keurig examen. Goed te doen. Zwakke leerlingen onderuit. Verzanden in gonio. Een gewoon examen, wat saai zelfs. Vergadering liep vlot, 1 uur'. Ziehier een aantal saillante opmerkingen.
Natuurlijk was er kritiek op details, zoals bij opgave 1. Men vond in het CV van vraag 4, derde oplossingsmethode, het één na laatste punt onhelder. Het was een goede startopgave.
Van opgave 2 werd opgemerkt dat deze beter met opgave 4 gewisseld had kunnen zijn. Veel kandidaten komen om in hun zelfgegraven formulegraf.
Bij opgave 3 wordt het perspectief van de figuur gelaakt. Sommigen hadden graag figuur *KLMN.PQ* apart uitgelicht gezien. Nu (dan niet?) werden er vreemde capriolen bij het berekenen van de inhoud geconstateerd.
In opgave 4 tenslotte was er in Den Haag en Rotterdam unanieme ontevredenheid over het CV van vraag 13. Veel kandidaten gebruiken de figuur - toch niet als bladvulling bedoeld, nietwaar - en vinden $a = 3$e bij $x =$ e zonder $a > 0$ te vermelden: *dat blijkt uit de figuur*. Niet dus.
Diverse verslagen stippen een belangrijk punt aan. Dat betreft het feit dat het CV een stapelnorm en geen sprokkelnorm weergeeft. Op de bijeenkomsten in Amersfoort, Amsterdam en Zwolle is hierover gediscussieerd. Doordat in den lande hier verschillend over wordt gedacht ontstaan soms grote verschillen tussen eerste en tweede corrector. 'Ik constateer de laatste jaren bij de tweede correctie steeds meer dat de betreffende collega's veel te veel goed rekenen en zich door mij niet laten overtuigen', zo schrijft de verslaglegger uit Amersfoort. Middeling van scores is dan ook niet bevredigend, is mijn eigen ervaring. Dit examen gaf twee fraaie casus te zien: vraag 8 over de integraal (verkeerde primitieve: daarna toch punten geven) en vraag 11 over het berekenen van een afstand (verkeerde keuze van werkvlak, daarna toch punten geven).
Iets voor een Korrel in Euclides wellicht?

Tot besluit

Dank aan iedereen die de brandstof leverde voor dit artikel. Uw betrokkenheid met wiskundig wel en wee is onverminderd groot gebleken, evenals uw bereidheid voor uw kandidaten om elk puntje te vechten. De ACD's, het Cito en de CEVO hebben in het afgelopen jaar bergen werk moeten verzetten, een hele prestatie, (ik tel een productie van maar liefst 27 examens, 9 per tijdvak) en uw kritiek op ruim een zevende deel daarvan is hierboven naar eer en geweten verwoord.

Ervaringen met de eerste groep leerlingen HAVO wiskunde B1 en B12 (1998-2000)

[Erik Zomervrucht]

Met verbazing volg ik alle commotie rond de examens havo wiskunde B1 en B12. Wat is er aan hand? Wat is er misgegaan? Mijn eigen ervaringen deze eerste twee jaren komen helemaal niet overeen met al deze negatieve verhalen. Door deze negatieve geluiden voel ik me gedwongen ook een ander geluid te laten horen.

Laten we aan het eind beginnen. Na de Centrale Examens ga ik op woensdag 24 mei jongstleden naar de landelijke bespreking in Utrecht. Daar wordt gesproken over dramatisch slechte resultaten. Aangezien ik het werk van mijn leerlingen nog niet (volledig) heb nagekeken houd ik mijn mond maar. Later tijdens het nakijken herken ik niets van al dat gemopper in het werk van mijn leerlingen terug: het werk is (gelukkig) goed gemaakt. Toch gaat het in mijn ogen om een hele normale modale groep leerlingen: niet overdreven slim of ijverig.

De normeringstermen

Verbaasd ben ik dan ook als het Cito (volgens mij) overdreven hoge normeringstermen vaststelt voor de berekening van de cijfers. Na verwerking van de normeringsterm van 1,6 voor B1 en 2,5 voor B12 is het gemiddelde cijfer van de leerlingen 7,4 (wiskunde B1) respectievelijk 8,2 (wiskunde B12). Hoewel ik mijn leerlingen deze hoge cijfers van harte gun is het wel in strijd met mijn realiteitsgevoel: de schoolexamencijfers van beide groepen lagen maar net boven de zes. Zo'n grote discrepantie heb ik niet eerder meegemaakt; de afgelopen twintig jaar haalden mijn leerlingen bij het Centraal Examen steeds een heel modale score bij de havo-examens.
Door deze hoge opwaardering wordt het nieuwe examenprogramma en de Tweede Fase ten onrechte in kwaad daglicht gesteld. Jammer want beide verdienen een positievere aandacht.

Tweede Fase op mijn school

Op de school waar ik werk, het Stedelijk Dalton Lyceum te Dordrecht, zijn we in 1998 enthousiast begonnen met de Tweede Fase. De mogelijkheid om de invoering een jaar uit te stellen is resoluut afgewezen omdat we het gevoel hadden voldoende voorbereid te zijn. Uitstel zou een jaar stilstand hebben betekend.

Organisatie
Wij werken met lesuren van 40 minuten en midden op de dag een Daltonzone (zelfstudieperiode) van 80 minuten. Dit geldt zowel voor de onderbouw als de bovenbouw; de leerlingen in de bovenbouw zijn dus gewend aan zelfstandig studeren. Daarnaast hebben we er voor gekozen (voorlopig) nog vrij veel lesuren in te roosteren voor de bovenbouw. Voor havo wiskunde B is dat 3 lesuren van 40 minuten in H4 (B1 en B12 gemengd) en 3 respectievelijk 5 lesuren voor B1 en B12

in H5. Hierdoor ontstaan in H5 heel kleine klasjes voor B1 en B12. Duur, maar noodzakelijk aangezien het B1 programma geen deelverzameling is van B12.

Lessen

We werken met Moderne Wiskunde 7e editie. Een prachtige methode, inhoudelijk zowel als om te zien, maar wel zeer uitgebreid. Van elk hoofdstuk doen we daarom alleen de vijf basisparagrafen en de Tussentoets. De Instap gebruiken we soms als klassikale introductie van een nieuw onderwerp. De paragrafen met Gemengde en Complexe opgaven zijn oefenopgaven voor de toetsen.

In H4 werken de leerlingen zelfstandig het boek door met als richtlijn één paragraaf per les, dus ongeveer elke twee weken één hoofdstuk: de einddata liggen vast. Nakijken moeten ze zelf met antwoordenboekjes.

In H5 hebben de leerlingen een jaarschema waarin per les staat aangegeven welke paragraaf aan de orde komt. Het maken (of niet ...) van de opgaven is de verantwoordelijk van de leerlingen zelf. Dit geldt ook voor het nakijken. Hoewel leerlingen soms wel klaagden dat ze veel tijd aan wiskunde moesten besteden leverde dit in het algemeen geen problemen op.

In de lessen hebben we voornamelijk grote opgaven samen gemaakt en/of besproken waarbij van alle leerlingen een actieve deelname werd verwacht. De omvang van de klassen maakte dit mogelijk. Bij deze klassikale besprekingen speelde de grafische rekenmachine (TI-83) via overheadprojector een belangrijke rol bij het verkennen en onderzoeken van de problemen en bij het uiteindelijk oplossen. De mogelijkheden (en beperkingen) van de grafische rekenmachine (GR) heb ik kortom uitgebreid aan de orde laten komen. Een belangrijk onderwerp van de klassikale bespreking was ook steeds het kiezen van een oplossingsstrategie en het vergelijken van verschillende strategieën. Daarnaast heb ik vaak oplossingsmethoden met de GR gezet naast meer algebraïsche oplossingen. De GR is wat mij betreft een welkome aanvulling op het basisgereedschap van de leerlingen.

Door deze manier van werken zijn de lessen misschien wel wat on-tweede-fase-achtig erg docent-gestuurd geweest maar voor een gecompliceerd vak als wiskunde B zie ik daar nog niet zo makkelijk een alternatief voor. Zelfstandig werken aan opgaven en Praktische Opdrachten (PO) moesten de leerlingen met name in de Daltonuren (80 minuten per dag) waarin de docenten in hun vaklokaal beschikbaar zijn voor hulp en ondersteuning. De vastgelegde jaarplanning liet niet veel ruimte voor eigen planningsinitiatieven van de leerlingen. Hoewel ik wel in de gaten hield of de leerlingen aan de opgaven werkten (met een klein groepje kan dat makkelijk) heb ik er geen punt van gemaakt als ze soms flink achterliepen en/of hele stukken oversloegen. Niet het maken van oefenopgaven maar het begrijpen van wiskundig gereedschap en het kunnen oplossen van problemen is wat mij betreft het doel van de lessen.

PTA

Het PTA bestaat uit 6 toetsen van 90 minuten verspreid over H4 en H5. De toetsen in H5 hebben een grotere weegfactor dan die in H4. Daarnaast zijn er geen andere toetsen.

Praktische Opdrachten

Wel veel eigen initiatief en organisatievermogen waren er nodig bij de leerlingen voor de PO's; in de lesplanning was wel enige ruimte om een aantal lessen voor het werken aan de PO's te gebruiken maar het grootste deel van het werk hiervoor moest in Daltonuren (en thuis) gebeuren.

De leerlingen hebben drie of vier PO's gemaakt: twee in H4, eentje in H5 voor B1 en twee in H5 voor B12.

Bij de PO hebben we steeds de volgende vorm gekozen:

- fase 1: inleidende vragen, opgaven en opstellen onderzoeksvraag

Dit werk moest ingeleverd worden en ongeveer een kwart van de punten konden hiermee verdiend worden

- fase 2: eigen onderzoek en verslaglegging

De volgende onderwerpen zijn daarbij aan de orde geweest:

Bevolkingsgroei: statistisch materiaal (op te zoeken op internet) moest omgezet worden in grafieken, prognoses en aanbevelingen (ontleend aan Moderne Wiskunde deel A1B1 deel 1)

Productfuncties: wanneer levert het product van twee lijnen een parabool op en met wat voor eigenschappen (ontleend aan Moderne Wiskunde deel B1 deel 2)

Reuzenrad: een onderzoek naar de beweging van een passagier in een reuzenrad waarbij het centrum van het rad ook weer op een draaiende schijf is geplaatst. De leerlingen moesten de resultaten van hun onderzoek mondeling presenteren en illustreren met grafieken op de GR tijdens een groepsdiscussie. Een middag waar ik nog steeds met plezier aan terugdenk. Nooit eerder is het me gelukt om een onderwerp als Periodieke Functies en de invloed van de verschillende coëfficiënten zo goed bij leerlingen te laten beklijven.

Meetkunde: berekeningen rond ruimtelijke figuren

Roken en levensverwachting: een simulatie met het programma VU-Stat met als basisgegevens resultaten ontleend aan een enquête in een H5 klas (ontleend aan Moderne Wiskunde deel B1 deel 3). Het resultaat moest geleverd worden in een artikel voor de schoolkrant.

Als gevolg van de Adelmund-verlichtingen in het programma hebben we voor de volgende lichting het aantal PO's teruggebracht tot één per leerjaar. Jammer, want op deze manier blijft er steeds minder over van alle aardige nieuwe zaken, maar uiteraard moet het wel werkbaar zijn voor de leerlingen.

Examenvoorbereiding

Als examenvoorbereiding hebben de leerlingen zelfstandig gewerkt aan de overzichtsparagrafen uit het boek. Daarnaast heb ik een aantal lessen besteed aan het samen maken van het voorbeeldexamen uit de Syllabus Wiskunde B havo. Daarbij is met name aandacht besteed aan:

- hoe schrijf je het op (alle stappen op de GR moeten reconstrueerbaar zijn)

- wanneer mag de GR gebruikt worden? (hierbij uitvoerig gebruikt gemaakt van het Nomenclatuurrapport van de NVvW)
- volledigheid van de oplossing

De examens

Een spannend moment, zowel voor mij als voor de leerlingen. In eerste instantie schrik ik van de hoeveelheid werk die van de leerlingen wordt verwacht, maar dit blijkt mee te vallen: alle leerlingen kunnen in 3 uur alle opgaven afmaken.

Het B1 examen begint met een aardige opgave over *Bioritme*. Niet al te moeilijk en een leuke context voor een gonio-opgave; met behulp van de GR komen de meeste leerlingen een heel eind. De opgave over *Bestrijdingsmiddelen* levert meer problemen. Deze opgave doet een groot beroep op de leesvaardigheid van de leerlingen. *Fruitvliegjes* levert ook geen verrassingen voor de leerlingen. Vraag 11 ("Op hoeveel dagen neemt het aantal fruitvliegjes met meer dan 75 per m^3 toe?") wordt met behulp van de grafiek van een differentiequotiënt goed opgelost merk ik tot mijn genoegen. Mijn leerlingen hebben standaard als functie Y_5 een differentiequotiënt geprogrammeerd staan van de functie Y_1 in hun GR (TI-83) als volgt:
$Y_5 = (Y_1(X + 0{,}001) - Y_1(X))/0{,}001$.
Hierdoor is het mogelijk van elke functie heel snel de grafiek van de afgeleide functie te laten tekenen. Heel handig voor het oplossingen van allerlei problemen met betrekking tot veranderingen, maar ook voor het verkennen en onderzoeken van de afgeleide van nieuwe functies.
De formule-manipulatie bij vraag 12 wordt lastig gevonden.
Bloemenvaas is een prachtige opgave waarin spiegelen en transleren een mooie rol hebben. Spiegelen levert wat problemen met de haakjes. Vraag 16 is een mooie onderzoeksvraag. De helling van de roos in punt *C* rekenen leerlingen natuurlijk uit met de GR (dy/dx) en niet met differentiëren zoals het correctievoorschrift veronderstelt. Dit mag gezien de formulering van de vraag. De vraag tot een goed einde brengen is voor de meeste leerlingen te veel gevraagd. Misschien een vraag die beter in het B12 examen past.
Ten slotte de *Euro-mix*. Een verzameling kansberekening-opgaven die traditioneel lastig wordt gevonden. De laatste opgave maken mijn leerlingen echter allemaal weer volledig goed. Tijdgebrek of gebrek aan concentratie speelt kennelijk geen grote rol.

Het examen B12 begint met dezelfde opgave over *Bioritme* als B1. Voor deze leerlingen geen probleem. *Trailertafel* is een aardige opgave die geen beroep doet op ingewikkelde berekeningen. Met enig meetkundig inzicht en goed opletten op de schaal kan hier niet zoveel mis. *Fruitvliegjes* is weer grotendeels hetzelfde als bij B1. Het *Lichaam* levert meer problemen op; de uitslag lukt grotendeels nog wel maar de inhoud is te veel gevraagd. Hoewel het een lastig lichaam is valt dit me toch wel tegen. Een aandachtspuntje voor volgend schooljaar. Ten slotte komt bij *Wortelfuncties* nog wat ouderwets rekenwerk aan de orde. Hoewel: de eerste vraag ($f(x) \geq x$) kan (en mag!) met de GR simpel worden opgelost. Waarom staat de grafiek van f trouwens al gegeven in de opgave? Problemen met het domein worden hierdoor eigenlijk al opgelost voor de leerlingen.
Het bepalen van de helling bij vraag 16 is wel erg simpel. Herschrijven van de afgeleide functie na differentiëren is daarvoor niet eens nodig.
Het onderzoek naar de parameter a bij vraag 17 stelt ook niet veel voor; het antwoord ligt wel erg voor de hand. De laatste vraag ('geef de vergelijking van de lijn door de toppen van de grafieken die horen bij verschillende waarden van a') is wel aardig. Van de 21 te behalen punten bij *Wortelfuncties* scoren mijn leerlingen er flink wat.

Er is veel moois van te maken en mee te doen

Conclusie

Ik had een groot vertrouwen in de vaardigheden van mijn leerlingen met de GR maar helemaal gerust op hun algebraïsche vaardigheden was (en ben) ik niet. Het examen mocht gelukkig vrijwel geheel met de GR worden opgelost. Vandaar dat ze boven verwachting goed scoorden op dit examen.
Wat mij betreft leggen we het accent (zeker voor deze B-leerlingen) een klein beetje terug richting algebra (zonder overigens alle nieuwe verworvenheden van de GR overboord te gooien!). De hoeveelheid tijd die in de boeken en in de lessen wordt besteed aan algebraïsche vaardigheden, rekenregels (exponenten en logaritmen) en regels voor differentiëren staan niet in verhouding tot de aandacht die deze zaken krijgen in de examens.

Al met al ben ik tevreden met het nieuwe programma. Er is veel moois van te maken en mee te doen. We moeten ons door invoeringsproblemen niet laten verleiden (nog) verder te schrappen in het programma.

A handbook of Small Data Sets

Boekbespreking [J. van 't Spijker]

D.J. Hand, F. Daly, A.D. Lunn,
K.J. McConway & E. Ostrowski (1994).
A handbook of Small Data Sets.
London, Chapman & Hall,
ISBN 0412399202, US$ 83,95

In het voorwoord van hun boek schrijven de auteurs over de aanleiding voor een compilatie van datasets het volgende. 'Tijdens ons werk als docenten statistische methodologie hebben we ons in de positie bevonden om een geschikte dataset te vinden waarmee technieken of bepaalde fenomenen geïllustreerd kunnen worden of die gebruikt kan worden bij examenvragen.' Net als veel andere leraren hebben we vaak getallen gefabriceerd om deze rol te laten vervullen. Dit is echter verre van ideaal en wel om de volgende reden:
Het is duidelijk dat niet realistische datasets ('In het land Randomania wil de grootvizier weten wat het gemiddeld aantal schapen per huishouden is') studenten niet zullen overtuigen van het belang en de relevantie van de discipline statistiek. Als de techniek die de docent behandelt zo belangrijk is als hij/zij claimt, hoe kan het dan dat hij/zij geen realistische voorbeelden kan vinden?
Als data waarvan gesuggereerd wordt dat ze van een reëel domein komen, bedacht zijn, dan bestaat er het risico van misleiding. In feite is het zeer moeilijk om realistische kunstmatige datasets te creëren, tenzij men bekend is met het toepassingsgebied. Je moet er voor zorgen dat de gemiddelden in de juiste range vallen, dat de spreiding realistisch is, et cetera.
Bedenken van data versterkt de misvatting dat statistiek een wetenschap van rekenen is, in plaats van een wetenschap van problemen oplossen. Om dit risico te vermijden is het noodzakelijk om reële problemen te presenteren met hun statistische oplossingen.
In het boek staan 500 realistische datasets beschreven. Deze datasets zijn tevens weergegeven op een meegeleverde floppy disk.
Een paar voorbeelden van de datasets:

Data set 4:	Intervals between cars on the M1 motorway
Data set 24 :	Snoring and heart disease
Data set 26 :	Airpolution in US cities
Data set 35 :	Facilities in East-Jerusalem
Data set 36 :	Yields of winter wheat
Data set 54 :	Household expenditure

Kortom, je kunt het haast zo gek niet bedenken of er is wel een dataset van aanwezig. Zelfs het 'gewoon' lezen van de datasets kan al een alleraardigste bezigheid zijn. Dataset 453 beschrijft 'language abilities', oftewel welke talen spreken de inwoners van de verschillende landen? Tot de talen behoren de vanzelfsprekende talen zoals Engels, Frans en Duits, maar ook Nederlands en Deens komen bijvoorbeeld voor. Als Nederlanders gaan we er altijd prat op dat we zoveel talen spreken en dat kun je makkelijk controleren in de matrix. Inderdaad geeft deze aan dat wij behoorlijk onze talen spreken; twee talen (waaronder Nederlands) blijkt zelfs 100% van de bevolking te spreken. Ik vroeg me dus af hoe onze zuiderburen, de Belgen, het op taalgebied zouden doen. Wel, de matrix leert ons dat bij onze zuiderburen 44% Frans spreekt en 0% Nederlands! Nul procent? Inderdaad 0% spreekt Nederlands, maar 59% spreekt Vlaams. U vermoedt al dat die andere score van 100% voor Nederland wel bij Vlaams zal staan. Echte puristen hoor, onze zuiderburen.
Samenvattend is dit een zeer nuttig boek voor iedere wiskundesectie. Gezien het prijskaartje dat er aan hangt inderdaad meer een aanschaf voor de sectie dan voor de individuele docent.



David van Dantzig en de Leer der Vergelijkingen

Dit jaar is het honderd jaar geleden dat David van Dantzig te Amsterdam werd geboren. Dat wordt herdacht met een symposium op 22 september te Amsterdam (zie Euclides 75-8). David van Dantzig is vooral bekend gebleven als initiator van de mathematische statistiek in Nederland en, wat ruimer beschouwd, als de man die het mathematisch modelleren introduceerde en propageerde. Daarnaast is hij van groot belang geweest als een van de grondleggers van het Mathematisch Centrum, tegenwoordig het Centrum voor Wiskunde en Informatica. Gedurende twee korte perioden, in de periodes 1927-1930 en 1953-1955, heeft Van Dantzig zich ook met de didactiek van de wiskunde bezig gehouden, althans, uit die perioden dateren zijn publicaties op dat terrein.

[Harm Jan Smid]

Wezenlijk voor Van Dantzig was de vraag naar de maatschappelijke betekenis van wiskunde en wiskunde-onderwijs. Zijn eerste artikel in *Euclides* (uit 1927) draagt de titel ‘De Maatschappelijke Waarde van Onderwijs in Wiskunde’. Van Dantzig was daar oorspronkelijk, onder invloed van de wiskundige Mannoury, nogal sceptisch over. Hij zag weinig in de “vormende waarde” van de wiskunde, wat toendertijd het dominerende motief achter het wiskundeonderwijs was. Hij had in die tijd veel contacten met de jonge Freudenthal, en het lijkt waarschijnlijk dat Van Dantzigs afwijzing van die vormende waarde van invloed op Freudenthals opvattingen is geweest.
Pas in de jaren vijftig, toen het toepassingsgebied van de wiskunde enorm toenam, vond Van Dantzig een bevredigend antwoord op de vraag naar de waarde van wiskundeonderwijs. Naast grondig wiskundeonderwijs voor een heel beperkte groep, die werkelijk in die richting zou doorgaan, bepleitte hij een vorm van *consumers mathematics* voor de grote meerderheid van de leerlingen. Hoewel dat zeker niet hetzelfde is als realistische wiskunde, zijn elementen daarvan wel in de op de ‘praktijk van het leven’ gerichte motivering van de realistische wiskunde terug te vinden.
Van Dantzigs didactische artikelen handelen voornamelijk over dat, al of niet vermeende, maatschappelijk belang van de wiskunde en wiskundeonderwijs. In zijn persoonlijk archief bevindt zich echter ook een veel praktischer concept-artikel over de problemen die leerlingen met vergelijkingen hebben, en wat je daaraan zou kunnen doen. Het is gedateerd op 25/8/1927, en vermoedelijk bedoeld voor *Euclides*. Of hij het uiteindelijk toch niet heeft ingestuurd, of dat het door de redactie geweigerd is, is mij niet bekend. Dit jubileumjaar leek mij een mooie gelegenheid om daar nog eens iets mee te doen.
Van Dantzigs artikel is om twee redenen interessant. In de eerste plaats bevat het een aantal zeer rake observaties van de problemen die de leerlingen in die tijd met vergelijkingen ondervonden. Hij moet die haast wel in bijles-situaties hebben opgemerkt, want onderwijservaring had hij toen nog maar nauwelijks. In de tweede plaats geeft hij, op zoek naar de oplossing voor die problemen, een historisch overzicht van de ontwikkeling van de ‘vergelijkingenleer’, zoals hij dat noemt. Aan de hand daarvan laat hij zien hoe gecompliceerd in feite ons formele begrip ‘vergelijking’ is, en suggereert hij impliciet een op de historische ontwikkeling gebaseerde aanpak. Daarmee is hij in Nederland een van de eersten die uit de geschiedenis van de wiskunde didactische ideeën voor het onderwijs van nu wil halen.

Van Dantzigs observaties zijn gegoten in de vorm van een serie vragen, die leerlingen naar aanleiding van het onderwijs over vergelijkingen (kunnen) stellen. Hieronder volgen die vragen, overgenomen uit het manuscript van Van Dantzig, en dus in de terminologie van 1927.

➢ Waarom moet $ax^2 + bx + c$ in vredesnaam altijd gelijk aan nul zijn?

➢ Waarom heeten in $ax + b = 0$ a en b de bekenden? Die ken je toch ook niet? Als dat niet waar is, vertel me dan bv. eens of a wel of niet gelijk aan nul is, wat er voor jullie toch zooveel op aan komt!

➢ Waarom heet x in $2x = 3$ de onbekende? Een kind ziet toch, dat $x = \frac{3}{2}$ is, d.w.z. x is bekend. In ieder geval is in de vergelijking

$$x + 17 + \frac{3.3.5 - 12.81}{91} = 2 + 17 + \frac{3.3.5 - 12.81}{91}$$

x veel bekender dan het rechterlid

➢ De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft tot oplossing

$$x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De wortels zijn x_1 en x_2. Dus in $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1).(x - x_2)$ is x precies hetzelfde als x_1 of x_2, wat ik overigens allang wist. Maar waarom moet je dan die lange formule leeren?

➢ Als $ax^2 + bx + c$ toch gelijk is aan nul, waarom schrijf je dan dien langen drieterm op, in plaats van eenvoudig 0 te schrijven?

➢ Als in de vierkantsvergelijking x gelijk is aan x_1, dan kan hij (het bekende uitzonderingsgeval buiten beschouwing gelaten) onmogelijk gelijk aan x_2 zijn. En als x niet werkelijk gelijk is aan x_1, waarom schrijf je dan $x = x_1$?

➢ Als het ‘ = ’ teeken in $x = x_1$ geen werkelijke gelijkheid uitdrukt (evenals bv. in $ax^2 + bx + c = 0$), wat drukt het dan wel uit? Een voorwaardelijke gelijkheid?
Maar onder welke voorwaarde wordt het dan een echte gelijkheid?
Het is anders zelf de voorwaarde voor het vervuld zijn der vgl., en ik wil juist weten òf die voorwaarde vervuld is of niet.

Men heeft getracht, deze en dergelijke moeilijkheden te omzeilen door het functiebegrip voorop te stellen. (...) Maar daarvoor brengt het dan ook weer nieuwe moeilijkheden mee, die niet minder groot zijn, bv.

➢ Drukt in $y = ax + b$ het ‘=’ teken een werkelijke gelijkheid uit? Dwz. hoe weet je, of y, als x verandert, altijd braaf mee variëert?
Als $y = ax + b$ werkelijk een gelijkheid is, is
$y - ax - b = 0$ het dan ook?
En ook $ax + by + c = 0$? En hoe is het dan met
$ax + by + c = r$?

➢ Is in $y = f(x)$ y de functie of $f(x)$?

➢ Is y nu iets anders dan bijvoorbeeld $ax^2 + bx + c$ of niet?
Hoe is het dan met $y = f(x) = ax^2 + bx + c$?
$f(x)$ is een afkorting. Is y een afkorting van een afkorting of wat dan?

Van Dantzig merkt over al deze vragen het volgende op: ‘De lezer zal moeten toegeven dat al deze vragen zinvol zijn. Hij zal den vrager in het gunstigste geval kunnen ompraten, en hem overtuigen dat 10 gekken meer kunnen vragen dan één wiskundeleraar kan beantwoorden, dat hij zijn vragen niet behoort te stellen, daar het met het mathematische fatsoen in strijd is, te willen weten of

het werkelijk waar is wat je beweert, maar als hij er ernstig over nadenkt, de vragen van hun tikje ‘badinage’ ontdoet en ze in alle ernst tracht te beantwoorden of althans te analyseren, dan zal hem dat toch niet meevallen.’

Ik denk zo, dat dat ook voor ons, anno 2000, nog evengoed geldt. Het is in ieder geval heel leerzaam je eens in de positie van de docent aan wie deze vragen gesteld wordt, in te leven en je af te vragen wat jezelf daar nu op zou antwoorden!
Het probleem is ongetwijfeld dat in het begrip ‘vergelijking’, en in de daarbij gebruikelijke notaties, heel veel impliciete afspraken zitten verstopt, zoals rond de meerdere betekenissen van het ‘ = ’ teken, en rond het subtiele verschil tussen een onbekende en een parameter. Leerlingen kennen die afspraken niet, en juist door hun vragen word je je die pas bewust.
Als je de tekst van de leerboeken uit die tijd nog eens doorleest, kun je wel begrijpen dat leerlingen die vergelijkingen maar duister vonden. Zo wordt in het bekende *Leerboek der Algebra* van Stoelinga en Van Tol een vergelijking als volgt gedefinieerd:
Definitie: Twee vormen, die door een gelijkteken verbonden zijn, noemt men een vergelijking.
In het voorgaande wordt echter alleen terloops een keer het woord ‘vorm’ gebruikt. Wat is dat eigenlijk? Is nu $2x = 3$ geen vergelijking, omdat rechts geen ‘vorm’ staat? Betekent deze definitie verder dat bijvoorbeeld $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ook een vergelijking is? Het zijn toch ‘twee vormen verbonden door een gelijkteken’? Of is dat toch weer niet de bedoeling? En als twee vormen door ‘een gelijkteken verbonden zijn’, hoeven ze kennelijk nog helemaal niet gelijk te zijn. Maar bij $y = f(x)$ dan weer wel?! En wanneer mag je eigenlijk “vormen door een gelijkteken verbinden”?

Bij een al even bekende auteur, C.J. Alders, in diens *Algebra voor M.O. en V.H.O.*, lezen we de volgende definitie:
Bepaling: Een vergelijking is een voorwaarde, die voor een beperkt aantal waarden van x overgaat in een gelijkheid; deze waarden heten de wortels van de vergelijking; x heet de onbekende.
Alders noemt hier een vergelijking een ‘voorwaarde’. Ook dat lijkt me nogal verwarrend. Wie komt nu op het idee dat $2x = 3$ een *voorwaarde* is? Hoe kun je als leerling zien of iets als voorwaarde is bedoeld, of juist als iets anders? En een ‘voorwaarde’ is toch heel iets anders dan een wiskundig begrip als een vergelijking? Hoe kan een ‘voorwaarde’ nu overgaan in een ‘gelijkheid’? En waarom is x bij voorbaat de onbekende en niet en niet y of a, en waarom mogen er maar een ‘beperkt’ aantal oplossingen optreden?

Wijdenes en Beth (in *Nieuwe School-Algebra*) geven de volgende definitie:
Bepaling: Een vergelijking is een opgave, waarbij gevraagd wordt welke waarde(n) men aan een of meer letters (onbekenden) moet toekennen, opdat twee vormen (de leden van de vergelijking), waarvan minstens een die letters bevat, gelijk worden.
Hier is een vergelijking dus eigenlijk een bepaald type som, geen wiskundig begrip, maar een opdracht. Een vorm hoeft kennelijk ook geen letters te bevatten, is het getal ‘ 2 ’ dan ook een ‘vorm’? Wat is eigenlijk het ‘gelijk worden van vormen’? Verder wordt al direct de mogelijkheid van een vergelijking met meerdere onbekenden genoemd. Hoe weet je dan wat wel en wat geen onbekende is? Het vreemde is namelijk dat het hoofdstuk de titel heeft ‘Eenvoudige vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende’, terwijl de voorbeelden en de theorie uitgebreid ingaan op vergelijkingen en stelsels vergelijkingen met meerdere onbekenden en op hogeregraads vergelijkingen.

Wees toch eens wat voorzichtiger met zo’n veel te snelle formalisering

Kortom: geen wonder dat heel wat leerlingen het maar moeilijk met die vergelijkingen hadden!

Van Dantzig geeft in zijn concept een tamelijk uitvoerig historisch overzicht van de manier waarop de vergelijkingen bij de Grieken, de Arabieren en bij de 16-eeuwse Italianen werden behandeld, en hij besluit dan zijn artikel als volgt:

‘In dezen geheelen ontwikkeling der vgl.leer, waarbij de <u>kennis</u> van oplossingsmethoden voortdurend veranderde, valt geenerlei wijziging van eenige beteekenis in de <u>formalisering</u> der vgln. op te merken. Nog steeds worden geen andere symbolen gebruikt dan voor de machten der onbekende, en worden voor de coëfficiënten steeds <u>natuurlijke getallen</u> genomen. Deze coëfficiënten worden hetzij door bepaalde getallen bij wijze van voorbeeld hetzij door uitdrukkingen als ‘het aantal der eenheden’ enz. weergegeven. Van kritieke gevallen, ontstaan door het nul-worden van den eersten coëfficiënt, kan dus geen sprake zijn.
Het feit dat alléén de onbekende en haar machten geformaliseerd wordt is van wezenlijk grooter belang dan bij oppervlakkige beschouwing het geval schijnt te zijn. Immers daardoor blijft het naieve standpunt

houdbaar: eene vgl. is niet anders dan eene doodgewone gelijkheid. Het feit dat ik één van de grootheden nog niet ken is van psychologischen, niet van mathematischen aard. Strikt genomen is deze houdbaarheid gebonden aan de existentie van één en niet meer dan één wortel, immers dan alleen is de onbekende door de vgl. eenduidig gedefinieerd.
De onbekende is dan een getal als ieder ander en tusschen dit getal en zekere andere bestaat eene gelijkheidbetrekking ('identiteit' zeggen we tegenwoordig). De vraag, wat er gebeurt als ik voor de onbekende een van de wortel verschillend getal substitueer kan evenzeer terzijde geworpen worden als bv. de vraag wat er gebeurt als ik in de gelijkheid $2 \times 2 = 4$ rechts voor 4 een van 4 verschillend getal substitueer: er ontstaat een wiskundig systeem, dat van het gebruikelijke verschilt, doordat zich de gelijkheid $1 = 0$ er uit afleiden laat. Het zal zeker wel niemand in de zin komen, dergelijke systemen op school te bespreken. Na 5 minuten zou men er trouwens over uitgepraat zijn.'

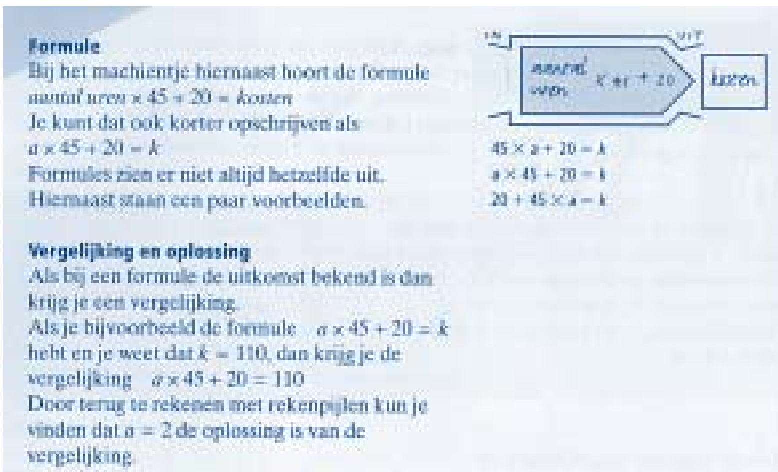
Hoewel Van Dantzig het niet met zoveel woorden zegt, mogen we toch wel concluderen dat hij, op basis van die historische ontwikkeling, van oordeel is dat er in de toenmalige schoolboeken een véél te vroege formalisering plaatsvond. Daardoor ontstonden naar zijn inzicht al die problemen rond "de begrippen 'vergelijking', 'onbekende', 'bekende', resp. 'functie', 'variabele', 'constante', en 'gelijk', 'identiek gelijk' enz." (citaat Van Dantzig). Het lijkt me dat de huiskamergeleerde Van Dantzig dat heel wat beter zag dan vele ervaren docenten en schoolboekenschrijvers uit die tijd. Wijdenes en Beth bijvoorbeeld komen in het al genoemde hoofdstuk 'Eenvoudige vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende' in de eerste de beste sommenparagraaf al met hele series opgaven van de volgende soort op de proppen:

$$(a + x)(b + x) - a(b + c) = \frac{a^2c}{b} + x^2$$

En dit is nog echt de moeilijkste niet ...

Hoe doen we het nu? Zou Van Dantzig tevreden zijn over de huidige aanpak? Dat is moeilijk te zeggen; ik heb niet de indruk dat hij een man was die erg gemakkelijk tevreden te stellen was. Maar heel anders doen we het in ieder geval wel.
Als voorbeeld loop ik eens na hoe vergelijkingen in de zevende editie van *Moderne Wiskunde* worden geïntroduceerd.
Vergelijkingen komen voor het eerst aan de orde in het hoofdstuk 'Vergelijkingen' (hoofdstuk 14 uit deel 1b havo vwo). Eerst worden in dat hoofdstuk *formules* behandeld, rekenvoorschriften waarmee je voor een concrete situatie een bepaald resultaat kunt uitrekenen. Bijvoorbeeld de formule: "*aantal flesjes* × 0,25 + 6 = *bedrag*", daarna genoteerd als '$a \times 0{,}25 + 6 = b$'. Het is een formule die aangeeft hoeveel statiegeld je krijgt als je een kratje met daarin een aantal lege flessen, inlevert. Als je nu wel weet hoeveel geld je hebt gekregen, en je wilt achteraf nog een nagaan hoeveel lege flesjes je had ingeleverd, dan krijg volgens *Moderne wiskunde* een 'vergelijking'. Of zoals het in de samenvatting van het hoofdstuk staat 'Als bij een formule de uitkomst bekend is dan krijg je een vergelijking'.
Dat is een aanpak die zeker recht doet aan wat Van Dantzig het 'naieve standpunt' noemt, waarbij je eigenlijk een gelijkheid hebt, waarbij je, als het ware toevallig, één onbekende, die bovendien eenduidig vastligt, nog niet weet. De formalisering in dit eerste hoofdstuk is nog heel beperkt. Er worden ook een aantal opgaven over vergelijkingen zonder context gegeven, maar het gaat uitsluitend om eerstegraads vergelijkingen met een eenduidig bepaalde oplossing, en parameters komen niet voor.
Het idee van een vergelijking als een formule waarvan je wel het antwoord weet maar waarvan je nu wilt weten wat de waarde van de oorspronkelijke variabele was, wordt in de tweede klas ook weer gebruikt bij de introductie van kwadratische vergelijkingen. Door eerst die formules, en de bij die formules behorende grafieken te bekijken, hoeft het dan geen verbazing meer te wekken dat zo'n kwadratische vergelijking soms geen, soms een, en soms twee oplossingen heeft. Ook hier komen bij de vergelijkingen geen parameters voor. Ze worden in deel 2b in een "+" paragraaf naar aanleiding van formules voor het eerst genoemd, en komen dan op een veel natuurlijker manier aan de orde dan bij vergelijkingen.

Is er vooruitgang in de didactiek? Ach, soms ben je daar wel eens somber over. Maar vaak stemt wat historisch perspectief je toch ook wel weer wat optimistischer. De observaties van Van Dantzig uit 1927, jammer genoeg toen niet gepubliceerd, zijn heel raak en *to the point*. De suggestie die uit zijn historische analyse spreekt: *wees toch eens wat voorzichtiger met zo'n veel te snelle formalisering*, lijkt mij al evenzeer ter zake.
Het is dan wel plezierig om te zien dat zo'n zeventig jaar later in dat opzicht toch heel wat bereikt is!


Formule
Bij het machientje hiernaast hoort de formule
aantal uren × 45 + 20 = *kosten*
Je kunt dat ook korter opschrijven als
$a \times 45 + 20 = k$
Formules zien er niet altijd hetzelfde uit.
Hiernaast staan een paar voorbeelden.

$45 \times a + 20 = k$
$a \times 45 + 20 = k$
$20 + 45 \times a = k$

Vergelijking en oplossing
Als bij een formule de uitkomst bekend is dan krijg je een vergelijking.
Als je bijvoorbeeld de formule $a \times 45 + 20 = k$ hebt en je weet dat $k = 110$, dan krijg je de vergelijking $a \times 45 + 20 = 110$
Door terug te rekenen met rekenpijlen kun je vinden dat $a = 2$ de oplossing is van de vergelijking.

Arnhem, 15 mei 1961.

Zeist,
Aan Zijne Excellentie
de Minister van Onderwijs,
Kunsten en Wetenschappen,
's-Gravenhage.

Excellentie,

Met voldoening heeft het Bestuur van Wimecos, vereniging van leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie kennis genomen van de Memorie van Antwoord op wetsontwerp 5350, waaruit is gebleken, dat het overwegend filologisch gericht onderwijs aan de B-leerlingen in de bovenbouw van het Gymnasium door een meer cultuurgericht onderwijs zal kunnen worden vervangen.
Deze voldoening hangt samen met onze overtuiging, dat in de huidige maatschappij het onderwijs in de wis- en natuurkundige vakken tot een hoger niveau moet kunnen worden opgevoerd dan thans in het v.h.m.o. mogelijk is. En dit niveau zal beter te bereiken zijn bij het toekomstige Atheneum dan bij het Gymnasium, doordat deze laatste school aan het talenonderwijs uiteraard een ruimere plaats zal moeten blijven inruimen dan voor het Atheneum noodzakelijk is te achten.
Er zal echter voor moeten worden gewaakt, dat niet de maximale tijd die op het Gymnasium voor de wis- en natuurkundige vakken zal kunnen worden vrijgemaakt tevens de bovenste grens betekent voor de mogelijkheden, die er ten aanzien van de exacte vakken op het Atheneum zullen blijken te bestaan.
Tot onze voldoening is in artikel 27(5) de mogelijkheid geopend het onderwijs in de bovenbouw van de scholen te differentiëren in verband met de persoonlijke belangen van de leerlingen.
Indien de Wetgever erin slaagt door voldoende differentiatie-mogelijkheden in de bovenbouw van de scholen de gelegenheid te geven tot een grondiger voorbereiding voor de studie der wis- en natuurkundige vakken op hogeschool en universiteit dan thans bij ons v.h.m.o. mogelijk is, zal hierin enige compensatie worden geboden voor het jaar tijdverlies, dat ontstaat door het zesjarig maken van het Atheneum.

Wat de leerprogramrna's en de urentabellen betreft die voor de diverse schooltypen gegeven zullen moeten worden, merken we op, dat er tal van onderwerpen uit het gebied van wis- en natuurkunde zijn die voor alle aanstaande studenten in deze vakken van belang zijn te achten, onderwerpen uit de moderne wiskunde bijvoorbeeld, die zich lenen voor een behandeling aan leerlingen van het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs, maar die door gebrek aan tijd op de tegenwoordige schooltypen voor v.h.m.o. niet aan de orde kunnen komen. Om misverstand te weren wijzen we er echter op, dat de in het wetsontwerp voorziene keuzemogelijkheden ook mede moeten brengen, dat b.v. aanstaande medici die de B-richting kiezen de speciale wiskunde door biologie vervangen.
Naar onze mening zal op het Gymnasium voor de B-leerlingen hoogstens een toestand geschapen kunnen worden, waarin het gewicht der exacte vakken dat der talen in evenwicht houdt.
De betekenis van de wis- en natuurkunde voor de tegenwoordige maatschappij brengt echter mede, dat op een schooltype van uitgesproken exacte signatuur het aantal uren voor wis- en natuurkunde dat voor de talen dient te overtreffen.
Zodra er voor het Atheneum-B een volwaardig programma voor wis- en natuurkunde tot stand is gekomen, verdient het aanbeveling om een zo groot mogelijk gedeelte van dit programma ook voor een deel van de B-leerlingen van het Gymnasium bereikbaar te maken. Dit is o.i. mogelijk geworden door het in de Memorie van Antwoord geopperde laten vervallen van het Grieks.
We dringen er bij Uwe Excellentie op aan bij de voortgezette behandeling van het Wetsontwerp 5350 en bij de te treffen uitvoeringsbepalingen de belangen van het onderwijs in de wis- en natuurkunde door het scheppen van voldoende differentiatiemogelijkheden in de hoogste klassen van de scholen voor voorbereidend wetenschappelijk onderwijs veilig te stellen.

Met verschuldigde eerbied,
namens het Bestuur van Wimecos,
dr. Joh. H. Wansink, voorzitter,
drs. J. F. Hufferman, secretaris,
Charlotte de Bourbonlaan 64,
Zeist

Brief aan de minister d.d. 15 mei 1961, in Euclides 36 (1960-1961)

Spelen met kansen

Boekbespreking

[F.W. Steutel TU Eindhoven]

Henk C. Tijms,

Spelen met Kansen

Epsilon uitgaven: 43, Utrecht, 1999,

208 p., prijs ƒ 37,50.

Dit is het vierde boek over kansrekening in de Epsilon Uitgaven, dus weer een boek in het Nederlands. In mijn bespreking van Epsilon nr. 36 gaf ik een overzicht van de tot dan verschenen Nederlandse teksten over kans-rekening en statistiek; dat waren er toen zo'n twintig.

Dit boek is weer een welkome aanvulling. Het is een bijzonder boek, geschreven door een gedreven toepasser. Het gaat de auteur om het oplossen van praktische problemen, niet om het presenteren van een theorie. In zijn inleiding schrijft hij: 'Middelbare-schoolwiskunde en belangstelling voor de fascinerende wereld van de kansrekening volstaan voor de bestudering van dit boek'. Het sleutelwoord is 'belangstelling'. Als je werkelijk wilt weten wat de oplossing is van de problemen die in dit boekje staan, dan kun je een hoop leren; voor mensen met minder belangstelling voor praktische problemen is een formele inleiding in de kansrekening wellicht toegankelijker.

Er zijn zeven hoofdstukken en vijf Appendices. In die laatste wordt een meer formele inleiding tot de kansrekening gegeven met afleidingen van formules die al eerder zijn gebruikt; verder worden wat wiskundige hulpmiddelen besproken, bijvoorbeeld genererende functies. Hoofdstuk 1 is een inleiding en Hoofdstuk 2 schetst een groot aantal problemen waar later een oplossing van wordt gegeven. Hoofdstuk 4, De wet van de grote aantallen en simulatie, geeft voorbeelden van herhaalde experimenten en het gedrag van een eenvoudige 'random walk', een beetje zoals in het bekende boek van W. Feller (Introduction to the theory of probability and its applications, vol.1). Het geeft tevens een korte cursus computersimulatie, een berekeningstechniek die in het hele boek belangrijk is, compleet met Pascalprogramma's. De hoofdstukken 4, 5 en 7 vormen de kern van het boek; daar wordt een groot aantal praktische, soms tamelijk lastige en verwarrende problemen opgelost, deels door toepassing van eenvoudige kansrekening, vaak geholpen door simulatie, soms door benaderingen en in hoofdstuk 7 met behulp van zogenaamde 'kansbomen'.

Ik noem een aantal bekende problemen.

Het 'verjaardagsprobleem': Wat is de kans dat onder k personen er minstens twee zijn met dezelfde verjaardag; wat is de kans op winst in de krasloterij; wat gebeurt in een casino; en het 'quizdeurenprobleem'. Dat laatste probleem heeft ook in Nederland stof doen opwaaien; gerenommeerde statistici gaven in de betere dagbladen met veel aplomb verkeerde antwoorden. Voor wie het probleem kent, dit is mijn favoriete oplossing: als je niet ruilt krijg je alle hoofdprijzen (er is er maar één) die in de kast zitten die je hebt gekozen; als je wel ruilt krijg je alle hoofdprijzen die in de andere twee kasten zitten: ruilen dus, en een kans van 2/3 op de hoofdprijs.

Het is een buitengewoon aardig boekje, zelfs voor mensen die de problemen niet willen oplossen, maar alleen willen weten wat de oplossing is; hoe hun kansen liggen bij het roulettespel, de krasloterij, de lotto of zelfs de effectenhandel.

Ik heb natuurlijk ook wel een paar bezwaren tegen het boekje. Het geeft behalve incidenteel in de tekst geen literatuurverwijzingen. De kansbomen in hoofdstuk 7 vind ik niet erg overzichtelijk, zonder dat ik durf te zeggen hoe het beter zou moeten. Op zijn Amerikaans is alleen van de opgaven met even nummers het antwoord gegeven; dat zijn overigens toch nog meer dan vijftig antwoorden. Al met al is het een onderhoudend en nuttig boek voor iedereen met belangstelling voor het berekenen van kansen.

Opgave 703

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek
aan Jan de Geus Valkenboslaan 262-A 2563 EB Den Haag

Op de internetsite **www.slo.nl/~ictenwis** staat de tekst “Wiskunde in de 2e fase en het gebruik van spreadsheets”.
Als puzzelaar werd ik getroffen door de praktische opdracht “GELUKKIGE GETALLEN” van de auteurs Arno Ruijgt en Floor van Lamoen.
De opdracht bestaat uit 3 onderdelen:
1. De mystieke betekenis van getallen.
2. Gelukkige getallen.
3. Toffe getallen.

Ad 2

Een voorbeeld:
78 geeft $7^2 + 8^2 = 113$
113 geeft $1^2 + 1^2 + 3^2 = 11$
11 geeft $1^2 + 1^2 = 2 < 10$ .... STOP.
Een getal heet **gelukkig** als bovenstaande procedure de uitkomst **1** geeft.
Het getal 23 heet dus **gelukkig**!
($23 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 1$)

Ad 3

We mogen onze eigen **toffe getallen** formuleren.
Ik draai de boel om: f_5 geeft het <u>vaste</u> grondtal 5 aan. Het gesplitste getal levert de exponenten.

Een voorbeeld:
$f_5(1959655) =$
$5^1 + 5^9 + 5^5 + 5^9 + 5^6 + 5^5 + 5^5 = 3931255.$

$f_5(3931255) =$
$5^3 + 5^9 + 5^3 + 5^1 + 5^2 + 5^5 + 5^5 = 1959655.$

We zien de periodiciteit: de periode is 2.
Dan is het logisch (?) om op zoek te gaan naar getallen met als periode 1 voor verschillende grondtallen. We vinden dan de volgende tabel.

$f_1(1) = 1$

$f_3(12) = 12$

$f_4(4624) = 4624$ en $f_4(595968) = 595968$

$f_5(3909511) = 3909511$

$f_7(X) = X$

$f_8(Y) = Y$

$f_9(10) = 10$

Met grondtal ≤ 10 zijn dit alle getallen met periode 1. Dit is toch tof?

Als u binnen een maand de waarde van X en van Y vindt en instuurt, dan ontvangt u 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Oplossing 700

Jubileumopgave 700 was een speciaal soort alphametic: “an ideal, doubly-true type”.
Dat wil zeggen: alle tien cijfers komen in de optelling voor en als we de opgave hardop voorlezen, dan klopt de optelling ook.

De unieke oplossing is als volgt:

Nog een mooi voorbeeld van dit type puzzel:

15(THREE) + 7(SEVEN) + 3(NINE) + 6(TEN) + 3(THIRTEEN) + SEVENTEEN + 2(NINETEEN) + HUNDRED + HUNDREDSEVEN + 2(HUNDRED-NINE) = SEVENHUNDRED.

THREE	72166
THREE	72166
THREE	72166
THREE	72166
THREE	72166
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
SEVEN	56964
NINE	4046
NINE	4046
TEN	764
TEN	764
TEN	764
THIRTEEN	72017664
SEVENTEEN	569647664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
NINETEEN	40467664
HUNDRED	2843163
HUNDREDTHREE	284316372166
HUNDREDSEVEN	284316356964
+	+
SEVENHUNDRED	569642843163

Met 55 punten is winnaar van een boekenbon van *f* 50,-:

Jan Verbakel
Mahatma Gandhilaan 22
5653 ML Eindhoven

Heel hartelijk gefeliciteerd!

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur? Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
2	14 oktober 2000	29 augustus 2000
3	25 november 2000	12 oktober 2000
4	06 januari 2001	16 november 2000
5	17 februari 2001	04 januari 2001
6	31 maart 2001	15 februari 2001
7	16 mei 2001	29 maart 2001
8	27 juni 2001	10 mei 2001

vrijdag 22 september 2000
Symposium UvA
David van Dantzigs honderdste geboortedag
www.cwi.nl/conferences/Dantzig2000
Zie Euclides 75-8, p. 284 en dit nummer p. 64 e.v.

woensdag 4 oktober 2000
APS-conferentie
Wiskunde in de Tweede fase
www.aps.nl
030 2856722

donderdag 5 oktober 2000
Dag van de leraar 2000+
Hogeschool Domstad Utrecht
www.dagvandeleraar.nl

vrijdag 6 oktober 2000
CWI in bedrijf
Rol van wiskunde in de biowetenschappen
www.cwi.nl/events

woensdag 11 oktober 2000
APS-conferentie
Wiskunde in het vmbo
www.aps.nl
030 2856722

dinsdag 10 oktober 2000
De Nationale Doorsnee
Statistiekproject voor klas 1 en 2 op alle scholen in Nederland.
Zie ook Euclides 76-0 en p. 55 in dit nummer.
www.nationaledoorsnee.nl

vr. 17 en za. 18 november 2000
NVvW-Lustrumcongres
Het 75-jarig bestaan van de Vereniging.
Zie vooral Euclides 76-0
www.nvvw.nl

vrijdag 24 november 2000
Voorronde Wiskunde A-lympiade 2001 en Wiskunde B-dag
www.fi.uu.nl

vr. 2 en za. 3 februari 2001
Nationale Wiskunde Dagen
www.fi.uu.nl
030 2611611
Zie Euclides 75-8, p. 281

vrijdag 16 maart 2001
Kangoeroe 2001
vrijdag 16 maart 2001
Aankondiging volgt later.

donderdag 26 april 2001
Nationale Conferentie
ICT in het wiskundeonderwijs
APS-wiskunde en Freudenthal Instituut
Aankondiging volgt later

zaterdag 26 mei 2001
Symposium Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs (HKRWO)
Hogeschool Domstad,Utrecht
Aankondiging volgt later

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

1 Kattenaids en Statistiek
2 Perspectief, hoe moet je dat zien?
3 Schatten, hoe doe je dat?
4 De Gulden Snede
5 Poisson, de Pruisen en de Lotto

Prijzen van deze Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *ƒ* 400,-
Individueel abonnement voor leden: *ƒ* 75,-
Losse boekjes voor leden: *ƒ* 16,50.
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbank nummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5).

Zelf ophalen kan in de losse verkoop: ledenprijs op bijeenkomsten *ƒ* 12,50; in de betere boekhandel *ƒ* 14,75.

* Nomenclatuurrapport Tweede Fase havo vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie, zie colofon.

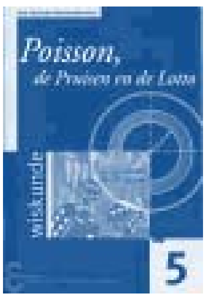
Zebra 4

De Gulden Snede

[door Wim Kleijne en Ton Konings]

De Gulden Snede is een verhouding die al twee en een half duizend jaar, sinds de Oude Grieken, een bijzondere plaats heeft in de wiskunde. Zo'n 800 jaar geleden ontdekte Fibonacci zijn beroemde rij. Het blijkt dat er vele, vaak verrassende, verbanden bestaan tussen de Gulden Snede en de rij van Fibonacci. De eerste helft van het boekje behandelt de eigenschappen van deze verhouding en rij, en hun onderlinge relaties. De Gulden Snede en de rij van Fibonacci zijn niet alleen wiskundig fascinerend, maar ze duiken ook op de meest onverwachte plekken op. Zo zijn er toepassingen te vinden in de beeldende kunst, de achitectuur en in de natuur. De tweede helft van het boekje bevat 7 opdrachten, waarin de toepassingen worden besproken en nader onderzocht kunnen worden. Een aanrader voor 'wiskunst'-liefhebbers.





Zebra 5

Poisson, de Pruisen en de Lotto

[door Henk Tijms, Frank Heierman en Rein Nobel]

'Lotto, de best kans om miljonair te worden'. Een reclameslogan die goed klinkt, maar wel een slogan waarop het nodige valt af te dingen. Voor de Nederlandse lotto zou je meer dan 9000 jaar moeten leven om een kans van minstens 50% te hebben ooit een keer in je leven de jackpot te winnen, voor het geval je elke week trouw 12 rijtjes zou invullen. Dit kun je uitrekenen dankzij een wonderschoon resultaat van de Franse wiskundige Simeon-Denis Poisson (1781-1840). In een meesterwerk dat hij in 1837 schreef, formuleerde Poisson terloops een natuurwet betreffende de kansverdeling van zeldzaam optredende gebeurtenissen. Heden ten dage geldt de Poisson-verdeling als een van de belangrijkste resultaten uit de kansrekening. Het boekje geeft op boeiende en heldere wijze een eerste indruk van het brede toepassingsgebied van de Poisson-verdeling, waarbij loterijen ter lering en vermaak dienen.

Nieuw

Bij de serie Keuzeonderwerpen wiskunde vwo

Elk boek bestaat uit drie delen. Het eerste deel (Opdrachten) is geschikt voor alle profielen. Het tweede deel (Onderzoek) en het derde deel (Presentatie) bevatten pittiger opgaven. De meeste vragen liggen binnen het bereik van alle profielen. Uit deze vragen maakt de leerling een keuze. Met elk boek zijn 40 studielasturen gemoeid.



GPS en wiskunde
Jan van den Brink

Satellietnavigatie is het navigatiemiddel van dit moment. Het Global Positioning System (GPS) werkt met satellieten die nauwkeurig je positie kunnen opgeven in het schermpje van je gps, een GPS-ontvanger. Waar je ook op de wereld bent, te land, ter zee of in de lucht. Met behulp van wiskunde(Meetkunde)wordt uitgelegd hoe het systeem werkt.

ISBN 90 01 83301 2
f 22,00 € 9,98



Op een goudschaal
Afwegingen over de gulden snede
Jelske Kuijper

In dit boek wordt terug gegaan naar de tijd, ongeveer 300 jaar v. Chr., toen Euclides in zijn *Elementen* de verhouding meetkundig vastlegde. Met deze theorie als uitgangspunt weeg je de verhoudingen in de beeldende kunst en in de natuur op een goudschaal. Kennis over de vlakke meetkunde is voldoende om het boek door te werken.

ISBN 90 01 83304 7
f 22,00 € 9,98

Voor meer informatie over de serie Keuzeonderwerpen, bel onze voorlichter Sandra Kooijstra, tel (050) 522 63 11.
U kunt de boeken ook bij haar bestellen.De boeken zijn alleen voor rekening leverbaar.

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55

E-mail: voorlichting.vo.exact@wolters.nl

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff